COMUNE DI CASTEL S. PIETRO TERME • 6-7-8 NOVEMBRE 2020 • INCONTRI CON LA MATEMATICA N. 34

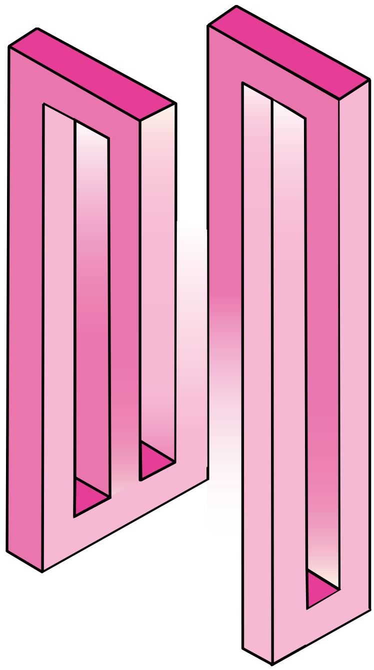
DIDATTICA DELLA MATEMATICA, DISCIPLINA SCIENTIFICA PER UNA SCUOLA EFFICACE

Convegno in videoconferenza

a cura di BRUNO D'AMORE e SILVIA SBARAGLI

Testi delle conferenze generali di:

Pietro Di Martino • Bruno D'Amore • Piergiorgio Odifreddi
Cristina Sabena • Silvia Sbaragli



Pitagora Editrice Bologna

«E così abbiamo creato questo Convegno in videoconferenza, nel quale per la prima volta non ci vedremo tutti simpaticamente accalcati, con giovani studenti fuori dalle porte d'accesso a controllare i pass, e con forti abbracci e strette di mano. Mancherà sicuramente quel vociare allegro, festoso, simpatico che tutti noi adoriamo, ma faremo di tutto per creare un convegno accogliente, profondo e coinvolgente, aspettando di rivedervi di persona nel 2021.
Sarà sempre un convegno che ha come tema la didattica della matematica, disciplina scientifica che si occupa dell'analisi critica di quel che accade nelle aule, quando un docente e i suoi allievi discutono di matematica».

(dalla *Prefazione*)

Bruno D'Amore è docente presso l'Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotà
Pietro Di Martino è docente presso l'Università di Pisa
Piergiorgio Odifreddi è stato docente presso l'Università di Torino
Cristina Sabena è docente presso l'Università di Torino
Silvia Sbaragli è docente presso il Dipartimento formazione e apprendimento, SUPSI, Locarno, Svizzera

In copertina: Oscar Reutersvärd, *Impossible figure*, realizzata fra il 1975 e il 1985.

ISBN 88-371-2126-6

9 788837 121266

€ 10,00

COMUNE DI CASTEL S. PIETRO TERME • 6-7-8 NOVEMBRE 2020 • INCONTRI CON LA MATEMATICA N. 34

DIDATTICA DELLA MATEMATICA, DISCIPLINA SCIENTIFICA PER UNA SCUOLA EFFICACE

Convegno in videoconferenza

a cura di BRUNO D'AMORE e SILVIA SBARAGLI

Testi delle conferenze generali di:

Pietro Di Martino • Bruno D'Amore • Piergiorgio Odifreddi
Cristina Sabena • Silvia Sbaragli

Pitagora Editrice Bologna

Direzione del Convegno
Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Silvia Sbaragli

ISBN 88-371-2126-6

Stampa: Pitagora Editrice S.r.l., Via del Legatore 3, Bologna.

http://www.pitagoragroup.it
e-mail: pited@pitagoragroup.it

Indice

SEMINARI PER LA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO E SECONDO GRADO

Prefazione

Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli

Questo nostro convegno si svolge dal 1986, puntualmente, ogni anno, succeda quel che succeda. Il primo (numero ordinale 0) si tenne a Bologna e poi dal secondo (numero ordinale 1) (1987) al trentaquattresimo (numero ordinale 33) (2019) sempre a Castel San Pietro Terme, la nostra patria accogliente.
Come ci si può aspettare, in tanti anni ne sono successe di tutti i colori. Un anno ci fu uno sciopero generale delle FFSS; un anno un'alluvione che spezzò l'Italia del nord in due; un altro arrivò all'ultimo minuto un dispotico ministro che decise di fare una conferenza pubblica nel salone dell'hotel delle Terme (allora era la sede principale del Convegno, ancora non era stato costruito lo splendido edificio Artemide) e la direzione dell'hotel non seppe dirgli di no. Insomma, sì, ne sono successe davvero di tutti i colori. Ma, sempre, abbiamo avuto la possibilità di svolgere il convegno con allegria, affetto, professionalità e soprattutto grande disponibilità dei colleghi docenti di tutti i livelli scolastici, realizzando sempre quel pienone che ci contraddistingue, familiare, malgrado i grandi numeri, e allo stesso tempo profondo e dotto.
Ma quest'anno 2020 abbiamo davvero rischiato per la prima volta di saltare un anno creando una discontinuità. Tutti sappiamo perché.
Ma poi abbiamo deciso di non arrenderci, di chiedere ai nostri fedeli convegnisti di non mollare (ma lo sapete che ci sono convegnisti che vantano più di 20 presenze?). E così abbiamo creato questo Convegno in videoconferenza, nel quale per la prima volta non ci vedremo tutti simpaticamente accalcati, con giovani studenti fuori dalle porte d'accesso a controllare i pass, e con forti abbracci e strette di mano. Mancherà sicuramente quel vociare allegro, festoso, simpatico che tutti noi adoriamo, ma faremo di tutto per creare un convegno accogliente, profondo e coinvolgente, aspettando di rivedervi di persona nel 2021.
Sarà sempre un convegno che ha come tema la didattica della matematica, disciplina scientifica che si occupa dell'analisi critica di quel che accade nelle aule, quando un docente e i suoi allievi discutono di matematica.
Sì, lo sappiamo, non è una grande novità! È così da ben oltre 30 anni…

Ma quest'anno è diverso, ce lo ricorderemo per sempre. Partecipare a questo evento caratterizzerà e misurerà l'affetto che i docenti di matematica provano per questa nostra iniziativa, così prolungata nel tempo, così festosa, così attesa, e quest'anno così necessaria per sentirci ancora vicini.

Non finiremo mai di dirlo: la didattica della matematica è una disciplina in sé; dal punto di vista accademico fa parte (in Italia) del raggruppamento MAT04 insieme a logica matematica, storia della matematica, matematiche complementari, matematiche elementari da un punto di vista superiore; non è né PED né PSI, è proprio MAT. La possiamo pensare come un ramo della matematica applicata, cioè di quella matematica che si occupa dello studio delle tecniche matematiche usate nell'applicare le conoscenze matematiche ad altri campi scientifici e tecnici, come si legge e si sente sempre dire. A tutt'oggi non c'è un consenso consapevole e scientifico su quali siano i rami della matematica applicata, per vari motivi; di solito si fa riferimento a come la matematica sia da considerarsi un metodo per lo studio di modelli con applicazioni concrete in ingegneria, biologia, fisica, chimica, medicina, economia, finanza, edilizia, climatologia ecc. C'è chi ancora è sorpreso dalla necessità del linguaggio matematico in questi campi applicativi. Vogliamo ricordare il fisico e matematico ungherese naturalizzato statunitense Eugene Paul Wigner, assistente di David Hilbert a Gottinga nel 1927, stretto collaboratore di John von Neumann, amico intimo di Albert Einstein e premio Nobel per la Fisica nel 1963. Un suo famoso e prezioso libro divulgativo, pubblicato la prima volta nel 1960, ha come significativo titolo: *L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali* (Wigner, 2017). In esso, Wigner fornisce una risposta filosoficamente e scientificamente sensata a una grande verità, che la matematica è il linguaggio più naturale, adeguato e significativo delle scienze naturali, come già aveva affermato Galilei, ma estendendo gli esempi a casi e situazioni che Galilei non avrebbe neppure potuto immaginare. Suggeriamo qui la lettura illuminante di una brevissima storia specifica della matematica applicata (Stolz, 2002).
Ma nel frattempo sono stati compiuti passi avanti notevoli, estendendo le applicazioni della matematica a molte altre attività umane, non solo di tipo "duro", tecnico o scientifico; oggi ci sono altri campi nei quali la matematica è stata applicata, la linguistica, la semiotica, la psicologia, l'arte, il riconoscimento degli autori di testi letterari anonimi ecc. Dunque il metodo matematico permette oggi di studiare applicazioni a settori finora non presi in esame, non necessariamente fornendo modelli in campi della matematica come l'analisi, la geometria o la probabilità, ma in senso assai più ampio, per esempio come metodo di confronto dei dati, di teorizzazione, di strutturazione logica. Fra questi campi non "duri" amiamo esemplificare facendo riferimento a problemi relativi all'apprendimento che fino a poco tempo fa sembravano appartenere soprattutto alla pedagogia e alla psicologia.

Un bell'esempio neppur tanto recente del riconoscimento ufficiale di questo modo ampio di vedere da parte dei ricercatori in matematica applicata è stato a nostro avviso il Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*, svoltosi presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino nel luglio del 2006. Un settore specifico di quell'incontro era dedicato (appunto) alle applicazioni della matematica alla mathematics education, forse il più seguito, probabilmente per la curiosità che causava questo nuovo ingresso. Le conferenze e i seminari di quella sezione vennero pubblicati nel 2007 su un numero speciale della rivista *La matematica e la sua didattica*, *21*(1).
Eppure, ancora molti, troppi, sono coloro che non sanno che la didattica della matematica è una disciplina in sé e la confondono con la prassi dell'insegnamento.
Ecco perché insistiamo su questo aspetto, sempre, tutti gli anni, anche in questo burrascoso 2020, che resterà nei nostri ricordi per sempre. Quando parleremo del convegno IcM XXXIV 2020, ci diremo l'un l'altro: «Fu quell'anno in cui il convegno fu in videoconferenza, ma con tanti iscritti entusiasti, l'anno in cui, finalmente, il messaggio arrivò e tutti gli insegnanti di matematica d'Italia, di tutti i livelli scolastici, si misero a studiare la didattica della matematica, come prima avevano studiato aritmetica, analisi, geometria e probabilità».
Se così fosse, questo 2020 resterebbe nella nostra memoria non solo per motivi infausti, ma per essere finalmente riusciti a far entrare la didattica della matematica nella matematica applicata, a servizio di tutti i docenti e ricercatori.

Vogliamo ringraziare Miglena Asenova per la grande disponibilità dimostrata nell'aiutarci a curare con precisione e competenza questi Atti.

Bibliografia

Stolz, M. (2002). *The History of Applied Mathematics and The History of Society, Synthese, 133*(1), 43-57.

Wigner, E.P. (2017). *L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali*. Milano: Adelphi.

CONFERENZE

Sugli *scivolamenti metadidattici*. Alcuni esempi

Bruno D'Amore
DIE Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis Matemática
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
NRD Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Università di Bologna

Abstract. *In Mathematics Education, the problem of metadidactic slippage (glissement metadidactique) has been highlighted for decades by Guy Brousseau. But school teaching practice proposes patterns of behavior (teaching-learning of Mathematics) from which it is evident that the theme is completely unknown. For example, in the widely held proposals on how to solve problems, which are considered miraculous panaceas, there are hidden deceptions that both proposers and teachers do not even know. In this paper we present the problem and give several negative examples of its influence.*

L'uso nella prassi didattica di sistemi euristici eretti a modello che sostituiscono un apprendimento matematico con l'apprendimento di un'analogia il più possibile algoritmica e sequenziale rientra in un fenomeno negativo e controproducente evidenziato dalla ricerca seria in Didattica della Matematica che va sotto il nome di "scivolamento metadidattico", assai diffuso e pericoloso, eppure talvolta perfino favorito da alcuni insegnanti inconsapevoli.
Esso si dà quando si passa dallo studio di un tema matematico T, che dovrebbe costituire oggetto di apprendimento, allo studio degli strumenti che al più potrebbero servire o per illustrare il tema T o per affrontare la risoluzione di un problema relativo a quel tema T, come banale schema e non come reale apprendimento (il che dovrebbe comportare come conseguenza la risoluzione corretta, appropriata, generale di problemi concernenti quel tema T). Ma se lo scivolamento ha successo, lo studente impara a comportarsi per analogia nei casi previsti da T, non ad apprendere consapevolmente T. Lo studente apprende uno schema, un algoritmo, un esempio generalizzato, non il tema T. Spesso, poi, alcuni insegnanti (quando sono disinformati in Didattica della Matematica) confondono questi due livelli, accettano in buona fede la situazione che appare superficialmente come positiva, anzi loro stessi la creano e la propongono in aula, confortati dai suggerimenti di "esperti", e dunque il gioco è fatto: tutti sono soddisfatti. Ma il tema matematico T resta per lo studente un mistero.
Per far capire bene la questione, suggeriamo alcuni esempi.

1. Consideriamo problemi molto diffusi nelle scuole di tutto il mondo del tipo: «3 operai fanno un certo lavoro in 9 ore; ma se gli operai al lavoro sono 6,

quante ore occorreranno per fare lo stesso lavoro?». Si tratta una proporzione con un termine incognito, $a : b = c : d$.
Per capire e dunque risolvere consapevolmente questo tipo di problemi è stato ideato da tempo immemorabile un meccanismo grafico noto in tutto il mondo come "regola del 3". Tale modello trasforma la formulazione aritmetico-verbale in un grafico con delle frecce che uniscono coppie di dati numerici e questo sembra rendere più efficace la risoluzione del problema. Solo che, come è successo e succede in tutti i Paesi, dopo un po' non si parla più del problema e del tema proporzioni, ma del grafico.

2. Altro esempio funesto si è avuto con l'avvento nelle aule della teoria ingenua degli insiemi negli anni '70 e '80, per un'idea sovrastimata di alcuni matematici di un certo prestigio, in buona fede, ma che poco avevano a che fare con i problemi di insegnamento-apprendimento. Dopo qualche anno, si è inserito nel mondo della scuola il problema della rappresentazione degli oggetti della teoria degli insiemi e dunque si sono introdotti circoli o ellissi per indicarli; di lì a poco, si è smesso di studiare la teoria degli insiemi, e si è cominciato a teorizzare su come disegnare e usare i grafici, essendo questo diventato il tema. (Chi ricorda i papygrammi?).

3. Le cosiddette "prove" delle operazioni, meccanismi algoritmici per verificare la correttezza delle operazioni; tutti sanno che si tratta di algoritmi inutili perché non garantiscono nulla.

4. La tecnica di divisione fra frazioni. Tutti sanno che per eseguire la divisione $a/b : c/d$ si deve eseguire la moltiplicazione $a/b \times d/c$ (b, c, $d \neq 0$). Ma nessuno spiega più in aula il perché di questa "regola", accontentandosi dello scivolamento metadidattico. Addirittura la consegna è esplicita: «Si *deve* fare così» oppure: «*Basta* fare così».

5. Saper effettuare le addizioni è un punto di forza della scuola primaria; ma a volte si converte in una pluralità di algoritmi che non hanno spiegazione se non come strumento e non come conoscenza: si distinguono addizioni "in colonna", "in riga", a mente, sull'abaco.

6. Si deve moltiplicare un numero per 10 o per 100. Non occorre eseguire i calcoli, "basta" aggiungere uno zero o due zeri rispettivamente alla fine del numero, dopo l'ultima cifra. Sappiamo quali meccanismi errati comporta questa "regola".

7. Si indica un oggetto matematico con un simbolo, semmai grafico (un disegno, un diagramma, …); poi si smette di pensare all'oggetto matematico astratto iniziale e tutto si rimanda al grafico stesso. Per esempio, si definisce un angolo piano e poi si indica con una freccina ad arco non si sa bene se

l'angolo o la sua ampiezza. In Sbaragli (2005) si mostra che ci sono studenti anche universitari che ritengono che l'angolo sia quell'archetto e non una parte di piano (per dirla secondo le dizioni correnti).

8. La scrittura posizionale dei numerali rappresenta una trappola mortale per gli aspetti cognitivi, soprattutto a causa dello scivolamento metadidattico.

9. La cosiddetta "regola di Ruffini", ben famosa nei primi due anni di scuola secondaria di II grado. Lo studente sta studiando i polinomi e dovrebbe saper eseguire la facile divisione $(2x^3–3x^2–5x–2) : (x–2)$ il che lo dovrebbe portare al quoziente $2x^2+3x+1$. Questo tema costituisce un ottimo argomento del sapere matematico. Ma, invece di insegnargli come fare a eseguire la divisione, gli si insegna uno schema formato da tutti i coefficienti in gioco che vanno messi in una particolare tabella in un determinato ordine.

10. L'euristica di Polya per la risoluzione di problemi e lo scivolamento metadidattico. L'"euristica di Polya" e l'insegnamento dei suoi presunti "metodi" (di tipo pseudo-algoritmico) di *problem solving* sono un altro pericoloso esempio di scivolamento metadidattico che alcuni insegnanti non riescono nemmeno a riconoscere. Le difficoltà ben note che gli studenti incontrano nel risolvere i problemi generalmente lasciano spesso alcuni insegnanti disarmati. Una classica risposta ingenua a livello primario è quella di spingere a risolvere problemi simili in modo tale che lo studente possa poi riprodurre la soluzione insegnata in un caso simile. Lo sforzo personale e generoso di Polya di proporre il suo proprio modo di fare come suggerimento euristico si è lentamente trasformato in un percorso pericoloso e controproducente.
10a. Come conseguenza altamente negativa di un'ingenua interpretazione didattica dei suggerimenti di Polya, una ventina di anni fa si diffuse nel mondo occidentale la fallimentare idea di far precedere alla risoluzione di un problema di Matematica la realizzazione di quelli che vennero chiamati "diagrammi di flusso" ispirati dal recente successo dell'informatica.
10b. Fra le deleterie e piuttosto deprimenti trasformazioni che l'idea geniale di Polya ha subito, c'è la più diffusa, almeno in Italia: una sequenza "assolutamente efficace" per risolvere qualsiasi tipo di problema scolastico; essa consta di una successione di norme concrete comportamentali quasi algoritmiche da seguire attentamente per non fallire:

- leggere attentamente più volte il testo del problema;
- fare un circoletto colorato attorno ai dati del problema (che sono numeri);
- leggere più volte la domanda e poi sottolinearla con un colore diverso;
- cercare nel testo del problema la "parolina chiave" che indica qual è l'operazione da eseguire fra i dati disponibili (per esempio: "in tutto" vuol dire che devi usare l'addizione, "perde o regala" comporta la sottrazione);

- eseguire l’operazione fra i dati, trovare il risultato di tale operazione;
- il risultato trovato è la risposta corretta al problema.

Il contratto didattico regna sovrano, sembra quasi che si voglia far sì che il bambino sia fallimentare in Matematica e che impari a risolvere solo problemi preconfezionati secondo un cliché stabilito a priori, un accordo preciso fra insegnante e allievi.

11. I test nazionali e internazionali e lo scivolamento metadidattico: la nuova frontiera della “antididattica”. Nel sogno del raggiungimento di risultati di alto livello nei test internazionali (PISA e simili) o nazionali (Invalsi) da parte di tutti gli studenti della nazione, della regione, della singola scuola, della propria classe, insegnanti e editori propongono, mettono in campo, usano e difendono manuali di istruzione (come risolvere i quesiti dei test nazionali e internazionali) non aventi a che fare con il favorire l’apprendimento della Matematica, ma dedicati a come risolvere i problemi, creando modalità artificiali del tutto improduttive, negative (D’Amore, & Fandiño Pinilla, 2013).

Due studi assai più ampi su questo tema si trovano in (D’Amore, & Fandiño Pinilla, 2020).

Bibliografia

Brousseau, G., & D’Amore, B. (2018). Los intentos de transformar análisis de carácter metacognitivo en actividad didáctica. De lo empírico a lo didáctico. *Educación Matemática*, *30*(3), 41-54.

D’Amore, B. (1993). Il problema del pastore. *La vita scolastica*, *47*(2), 14-17.

D’Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Docet.

D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2013). Il passo più lungo. Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d’aula reali. *Bollettino dei docenti di matematica*, *34*(66), 43-52.

D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2020). Sugli *scivolamenti metadidattici*. Alcuni esempi. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 43*(2A), 108-136.

Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni “inevitabili” e misconcezioni “evitabili”. *La matematica e la sua didattica*, *19*(1), 57-71.

Parole chiave: scivolamento metadidattico; euristica di Polya; problem solving; processi algoritmici; misconcezioni.

Riflessioni sull'insegnamento della matematica in seguito a una pandemia

Pietro Di Martino
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Abstract. *We all lived a very difficult time: Italy, like many other Countries, enforced mass closures to stem the spread of pandemic. It is as if the time were suspended and in this suspended time the mass communication was "imbued with mathematics": for this reason – as math educators – we have the opportunity to verify the idea of mathematical literacy and, eventually, to rethink the main goals of math education. "The end of education" is the title of a very famous book by Neil Postman (1996). The author clearly plays with the ambiguity of the term "end" in English: if we do not reflect about the purpose of education, education is doomed to fail.*

1. La pandemia e l'educazione matematica

Nel novembre 2019 ho partecipato al trentatreesimo convegno "Incontri con la Matematica" a Castel San Pietro con una relazione plenaria dal titolo: *L'educazione matematica e gli obiettivi in verticale: dall'infanzia al termine della scuola secondaria di secondo grado*. Il tema non solo mi sembrava adatto ad una plenaria che potesse interessare gli insegnanti di tutti i livelli scolari, ma mi ha sempre appassionato: si tratta di ragionare veramente in verticale e sulla prospettiva lunga, di segnare una strada che funzioni da guida anche di coerenza per le scelte educative più puntuali.
Poco meno di un anno dopo, siamo stati investiti dalla tragedia immane della pandemia: migliaia di morti e un lockdown che ha portato alla chiusura delle scuole di ogni ordine e grado.
Dal punto di vista educativo, aver vissuto questo momento così drammatico ha portato diversi spunti di discussione e di riflessione, anche per il futuro.
Senza la pretesa di essere esaustivo, ne segnalo tre, tra loro anche strettamente correlati. I primi due sono di carattere generale, ma ovviamente possono essere declinati relativamente agli aspetti matematici, l'ultimo è direttamente calato nell'ambito matematico:

- La valutazione della risposta della scuola all'emergenza: come ai diversi livelli scolari ci si è mossi, con quale efficacia, quali le risorse messe in campo. In quest'ultimo ambito, entra in gioco anche l'aspetto delle risorse umane e, in particolare, della formazione insegnanti rispetto all'utilizzo ad esempio di ausili tecnologici.

- La discussione sull'efficacia potenziale della didattica a distanza. Al di là del confronto con la didattica in presenza, come, in situazioni di emergenza, è possibile sviluppare al meglio la didattica a distanza.
- La valutazione del ruolo della matematica nella crisi che abbiamo vissuto su diversi piani: comunicativo, interpretativo, decisionale.

Quest'ultimo aspetto, probabilmente meno esplorato attualmente dei primi due, è quello che a me interessa maggiormente.
Si tratta infatti di riflettere sugli obiettivi dell'educazione matematica nel suo complesso – esattamente ciò di cui avevo discusso nella plenaria del 2019 – e, nell'ottica di educazione alla "cittadinanza attiva", avere anche la possibilità di valutare se tali obiettivi vadano integrati, alla luce della tragica esperienza vissuta.
Che la matematica abbia avuto un ruolo importante nella comunicazione di massa durante la pandemia è indubitabile. Per circa due mesi (marzo e aprile 2020) i giorni di molti italiani sono stati scanditi dall'attesa del bollettino della Protezione Civile delle ore 18.00, bollettino pieno di numeri, percentuali e modelli matematici di simulazione degli scenari futuri: termini come "crescita esponenziale", "crescita lineare" e "picco" sono entrati nelle case della maggior parte degli italiani.
Delle riflessioni importanti – che coinvolgono anche aspetti di natura diversa dalla stretta educazione matematica: dalla psicologia all'antropologia, dalla sociologia all'etica – potrebbero essere fatte sull'uso (e dunque la forza almeno in prima battuta) dei numeri per convincere la gente a certi comportamenti, così come sulla necessità e difficoltà di raccontare a tutti a cosa serve e cosa può dire un modello matematico (vedi lo scambio di battute tra il virologo Guido Silvestri e l'Unione Matematica Italiana in seguito all'uscita su *La Stampa* dell'8 giugno 2020 di un articolo dal titolo "I modelli matematici hanno fallito").
Mi voglio però maggiormente concentrare in questo intervento su come la competenza matematica dei non specialisti è entrata in gioco (o sarebbe dovuta entrare in gioco) durante il lockdown: è infatti analizzando i diversi stimoli relativi alla competenza matematica emersi in questo drammatico spaccato di vita reale che possiamo avanzare delle considerazioni sugli obiettivi dell'educazione matematica per tutti.
In questo caso riconosco quattro distinte categorie, ognuna delle quali meritevole di approfondimento:

1. La competenza matematica per capire ad un livello base il fenomeno. Quella chiamata in causa dai numeri, le percentuali e i grafici presentati nel bollettino della Protezione Civile e in tutti i mass media per descrivere l'andamento e la pericolosità della diffusione del virus.

2. La competenza matematica per spiegare il fenomeno, così come per porsi domande su dati strani (e dunque metterli in discussione). Ci sono stati vari casi interessanti di questo tipo, alcuni molto noti, come quello legato al tasso di letalità (che in Italia risultava essere 20 volte maggiore che in Germania).
3. La competenza matematica per sviluppare soluzioni ottimali relativamente a determinati vincoli. Questa competenza è balzata agli onori della cronaca nel passaggio tra la fase 1 e la fase 2 del lockdown, relativamente alla riorganizzazione degli esercizi commerciali, in particolare i punti di ristoro, a seguito delle norme sul distanziamento sociale;
4. La competenza matematica per prendere decisioni appropriate. Quest'ultima, particolarmente rilevante, riguarda una categoria particolare, quella dei decision makers, coloro che decidono. Il quadro che è emerso è stato a tratti molto preoccupante con due casi particolarmente eclatanti relativamente alla spiegazione del valore R_t e al ruolo della scienza (e dunque anche della matematica) nel percorso decisionale.

Bibliografia

Postman, N. (1996). *The End of Education – Redefining the value of school.* New York: Vintage Books.

Parole chiave: competenza matematica; obiettivi dell'educazione matematica; cittadinanza attiva; ruolo della matematica; ruolo dei modelli matematici.

I volti dell'infinito

Piergiorgio Odifreddi
Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Abstract. *The best minds, and the worst demented ones, of every intellectual category, artists and writers, theologians and philosophers, scientists and mathematicians, have pontificated and discussed for millennia about infinite. Here we will just mention some phrases by famous authors on this subject.*

L'infinito è, insieme all'essere, il concetto più usato, abusato e travisato della storia del pensiero (occidentale, ma non solo). Entrambe queste idee metafisiche si ottengono sostantivizzando parole che non sono sostantivi: come l'aggettivo "infinito" e il verbo "essere". Con la semplice aggiunta di un articolo determinativo, li si rendono entrambi dei sostantivi, e li si forza a descrivere come un oggetto ciò che in realtà è una proprietà, nel caso di un aggettivo, o un'azione o una relazione, nel caso di un verbo.
Un ulteriore passo verso l'abisso si compie quando si personifica l'oggetto in un soggetto, questa volta mediante la semplice sostituzione di una minuscola con una maiuscola. Passando dall'infinito e dall'essere all'Infinito e all'Essere si abbandona la filosofia laica e si entra a gamba tesa nella teologia, sacra o profana che sia: cioè, si perde il contatto con la realtà fisica e si entra nell'immaginario della Metafisica, dove regnano non solo le maiuscole e le iperboli, ma anche le confusioni e le illusioni.
Chi inizia a leggere sull'infinito, o a scrivere dell'infinito, sa dunque fin dagli inizi, o dovrebbe saperlo, che rischia non solo di continuare a leggere o scrivere all'infinito, con la minuscola, ma anche di finire per entrare in contatto coll'Infinito, con la maiuscola: nel primo caso sprecherebbe la vita, e nel secondo smarrirebbe il senno.
Lo sapeva bene Jorge Luis Borges che, aprendo le quattro stringate paginette del racconto-saggio Avatar della tartaruga, si schermiva con il lettore e con sé stesso: Qualche volta ho desiderato di compilare la nobile storia dell'infinito. Cinque, sette anni di apprendistato metafisico, teologico, matematico, mi metterebbero in grado (forse) di pianificare decorosamente questo libro. Inutile aggiungere che la vita mi vieta la suddetta speranza, e anche il suddetto avverbio.
Se la vita vietava la speranza a un giovane trentaduenne, e l'avverbio la vietava a un saggio perenne, cosa mai può sperare chi ha più del doppio dei suoi anni di allora, e meno della metà della sua cultura di sempre? Certo non di scrivere la mobile storia dell'infinito, che non esiste, ma neanche di aggiungere un'altra sua statica storia alle fin troppe già esistenti.

Dell'infinito hanno ormai pontificato e discusso per millenni le migliori menti, e i peggiori dementi, di ogni categoria intellettuale: artisti e scrittori, teologi e filosofi, scienziati e matematici...
A beneficio degli ostinati fan del diacronico sto comunque stilando una breve compilazione di concise citazioni sull'infinito, come Melville sulla balena in Moby Dick, per offrire almeno un'idea delle opinioni che sono annegate al largo dello spazio geografico, e dei fatti che sono emersi nel corso del tempo storico. Salvo rare eccezioni, sto impietosamente limitando le citazioni a una per autore, per privilegiare la varietà della scelta. E senza eccezioni le sto adattando e comprimendo in due o tre righe, all'insegna del motto del *Tractatus*: Ciò che si sa, si può dire in tre parole. O, come diremmo oggi, in un sms o in un tweet.
L'intento di questa breve scarica di flash è mostrare quanti concetti completamente diversi fra loro siano stati ammassati e nascosti dietro il paravento di un'unica parola. Il polverone che è stato sollevato sull'infinito, e la nebbia in cui esso è rimasto perennemente avvolto, hanno fatto sì che molte diverse accezioni di uno stesso vocabolo venissero scambiate per sfumature di un unico concetto, o confuse come semplici variazioni una dell'altra.
Senza scomodare già fin d'ora Cusano o Cantor, che pure scomoderemo a tempo debito, possiamo invece subito affermare che non c'è un solo infinito, al singolare, ma ci sono molti infiniti, al plurale: in senso sia letterale, che metaforico. Cercheremo dunque di strappare la falsa maschera dell'unicità all'infinito, per svelare la vera molteplicità dei suoi mille volti. Anche se, memori dei divieti della vita e dell'avverbio ricordati da Borges, ci limiteremo a quindici di questi avatar, nei quali si manifestano le più diffuse, e fra loro confuse, accezioni dell'infinito.
Aprendo il Libro VII dei *Miserabili*, Victor Hugo avvertiva: Questo libro è un dramma, il cui primo personaggio è l'infinito.
La decostruzione del personaggio nelle sue varie facce ci permette di sottoscrivere la stessa avvertenza, sostituendo però la commedia al dramma. Il lieto fine sarà, si spera, la constatazione che un minimo di matematica permette di fare un massimo di chiarezza nel buio di una gran confusione.
Una brevissima raccolta di citazioni tratte dalla letteratura e dall'arte esemplificherà questo lavoro in corso.

Se mi proponete di produrre l'*Iliade* mettendo a caso una lettera dietro l'altra, c'è un numero finito di tiri che mi renderebbe una scommessa vantaggiosa. E con un numero infinito di tiri a disposizione, avrei un vantaggio infinito.

Denis Diderot, *Pensieri filosofici* (XXI), 1746

Gli abissi dell'infinito si aprono invano attorno a noi: un bambino non ne è spaventato, i suoi deboli occhi non possono sondarne la profondità. Per i bambini tutto è infinito, essi non sanno porre un limite a nulla.

Jean-Jacques Rousseau, *Emilio, o dell'educazione*
(*L'età della ragione e delle passioni*, IV), 1762

Potrei venir confinato in un guscio di noce, e ritenermi re dello spazio infinito, se non facessi brutti sogni.

William Shakespeare, *Amleto*
(*Elsinore, stanza del castello*, II.2), 1600 ca.

L'anima, non vedendo i confini, riceve l'impressione di una specie di infinità, e confonde l'indefinito con l'infinito. Non però comprende né concepisce effettivamente nessuna infinità.

Giacomo Leopardi, *Zibaldone* (472), 4 gennaio 1821

MEFISTOFELE. Lasciati andare in balia dell'oceano, immergiti nella contemplazione dell'infinito: là almeno vedrai accavallarsi onda su onda, e nel momento in cui l'abisso si spalancherà davanti a te, sarai invaso dal terrore.

Johann Wolfgang Goethe, *Faust*
(*Una galleria oscura*, II.1), 1832

Ci sono stati, e ci sono ancora, matematici che osano ipotizzare che due rette parallele possano prima o poi incontrarsi nell'infinito. Io ho una mente euclidea, terrestre: come potrei pretendere di ragionare su ciò che non è di questo mondo?

Fëdor Dostoevskij, *I fratelli Karamazov*
(*I fratelli fanno conoscenza*, V.3), 1879

Ai tuoi fianchi c'è l'oceano: è vero, non sempre muggisce, talvolta si distende come seta e oro e sogni di bontà. Ma verranno momenti in cui saprai che è infinito, e che non c'è niente di più terribile dell'infinito.

Friedrich Nietzsche, *La Gaia Scienza*
(*Nell'orizzonte dell'infinito*, III.124), 1882

Più il blu è profondo, più attira l'uomo verso l'infinito, risvegliando in lui un desiderio di purezza e di soprannaturale. Schiarendosi, diventa più neutro e lontano, e sembra indifferente all'uomo come il blu infinito del cielo.

Vassilij Kandinskij, *Lo spirituale nell'arte*
(*Il linguaggio delle forme e dei colori*, VI), 1911

Il talamo si perdeva nei regni infiniti del domani, proiettato verso un punto infinitamente al di là del dopodomani, infinitamente pallidamente remoto, come il bacio dell'asintoto alla sua curva.

Carlo Emilio Gadda, *L'Adalgisa*
(*Un concerto di centoventi professori*), 1944

La parola "infinito" non esprime affatto un'idea, ma lo sforzo di arrivarci. L'Uomo aveva bisogno di un termine per segnalare la direzione di questo sforzo, la fitta nebbia dietro la quale sta, per sempre invisibile, l'oggetto di questo sforzo.

Edgar Allan Poe, *Eureka*, 1848

Un musicista ha mai sentito l'urgenza interiore di approcciare l'eternità con il suono? Il suo problema dinamico è più difficile di quello dell'artista statico, che può penetrare in profondità nell'infinito su un semplice foglio di carta.

Maurits Cornelis Escher, *Il mondo di Escher*
(*Approcci all'infinito*), 1971

Alcuni sognano un universo infinito, altri lo credono finito. Io sto a metà: non riesco a concepire un universo infinito, ma l'idea che il mondo un giorno cesserà di esistere mi affascina e mi sgomenta. Così oscillo, e non ho risposte.

Luis Buñuel, *Il mio ultimo respiro*
(*Ancora ateo … grazie a Dio!* XV), 1972

Non usare parole sproporzionate. Non dire "infinito" quando vuoi dire "molto", altrimenti non ti rimarranno parole per parlare di ciò che è veramente infinito.

Clive Staples Lewis, *Lettera alla piccola Joan Lancaster*, 26 giugno 1956

Ogni frase comprende un'infinità di parole: se ne percepisce soltanto un numero limitatissimo, trovandosi le altre all'infinito o essendo immaginarie. Molti ingegni ne hanno avuto il presentimento, ma mai la netta coscienza.

Raymond Queneau, *I fondamenti della letteratura secondo David Hilbert*, 1976

Bibliografia

Odifreddi, P. (2020). *I volti dell'infinito*. Milano: Rizzoli.

Parole chiave: infinito nella letteratura; infinito nell'arte; infinito nella matematica; infinito nella filosofia; infinito.

Saper immaginare e saper vedere in matematica

Cristina Sabena
Università di Torino

Abstract. *Seeing and imagining are two fundamental components of mathematics activity, even if they are often neglected at school. Drawing on the literature in mathematics education, I focus specifically on the role of visualization. In the lecture I will show examples relative to different school levels and I will discuss the interplay between visual-synthetic features and logical-analytical ones in mathematical processes.*

1. Introduzione

Dal punto di vista biologico, *vedere* è per noi fondamentale: la facoltà di visione è la nostra più importante fonte di informazioni sul mondo, e infatti gran parte del cervello è coinvolta nella visione e nel controllo visivo del movimento e nella percezione. *Saper vedere* è altrettanto cruciale dal punto di vista sociale: viviamo in un mondo in cui le informazioni vengono trasmesse in gran parte in forma visiva e le tecnologie supportano e incoraggiano un tipo di comunicazione e di fruizione della realtà che è essenzialmente visivo (basti pensare all'uso pervasivo degli emoticons nei messaggi, al rapidissimo diffondersi dei meme sui social, ai recenti sviluppi sulla realtà aumentata).
Ma oltre a vedere ciò che si trova all'interno del nostro campo visivo, come esseri biologici e sociali aspiriamo a vedere anche ciò che *non* possiamo vedere: entrano allora in gioco la *visualizzazione*, come metodo di "vedere il non visto" (Arcavi, 2003, p. 2016) e *l'immaginazione* (Arcavi, 2003) sottolinea due aspetti della questione. Il primo riguarda il grande ruolo che hanno e hanno avuto le tecnologie per ampliare le possibilità di visione dei nostri organi visivi biologici: pensiamo a come il microscopio o il telescopio ci abbiano permesso non solo di vedere cose diversamente non visibili, ma anche di raffinare la nostra conoscenza sulle cose stesse prese in esame. Il secondo aspetto è più profondo e fa riferimento a un piano più astratto, dove non esiste alcuno strumento che può visualizzare per noi e dove "vedere il non visto" fa riferimento al trascendere i limiti della nostra mente: la matematica fa parte di questo piano. A seconda dalla parte da cui si considera la faccenda, possiamo rimanerne affascinati, come è successo a molti di noi – che probabilmente anche per questo abbiamo scelto la matematica nella nostra vita professionale – o in difficoltà, come succede a molti studenti. Perché imparare a vedere il non visto e a usarlo per affrontare un problema (matematico) non è affatto facile e tipicamente non è un obiettivo didattico posto in maniera esplicita.

2. Alcuni risultati di ricerca

Grandi matematici hanno evidenziato l'importanza degli aspetti visivi e di immaginazione nel loro lavoro, come strumenti fondamentali di scoperta, di ragionamento, di euristica: ad esempio Bruno De Finetti ha sottolineato in un titolo di un suo libro l'importanza del *saper vedere* in matematica (De Finetti, 1967; si veda anche il numero speciale a cura di Anichini, Giacardi e Luciano pubblicato nel 2015). D'altro canto, gli aspetti visivi fanno da sempre parte dell'attività matematica, perché la matematica presuppone l'utilizzo di *segni* come simboli e diagrammi e in essi una componente spaziale è necessariamente coinvolta, non limitatamente alla geometria.

Se però si considera in modo specifico il ruolo della visualizzazione nell'apprendimento della matematica (per esempio, nella risoluzione dei problemi), i primi studi[1] sono piuttosto recenti: risalgono agli anni '70 ad opera di Bishop e Clements, che indagarono le preferenze degli studenti rispetto alla visualizzazione in matematica e come le abilità spaziali interagiscono con queste preferenze. Alcuni studiosi distinguono tra "forme interne", come le immagini mentali, e "forme esterne". Altri sottolineano maggiormente il loro legame, in riferimento alla posizione di Piaget e Inhelder, secondo cui le immagini mentali sottostanno alla creazione di disegni e disposizioni spaziali.

Le ricerche di Presmeg su questo tema costituiscono un caposaldo e offrono diversi spunti di riflessione. Come primo passo, la studiosa si è chiesta se l'utilizzo di immagini visive in matematica sia una questione di preferenze da parte di studenti e docenti, e da cosa queste preferenze siano determinate. Lo studio, condotto su studenti di grado 11 e 12 e sui loro insegnanti, si è basato su problemi verbali che potessero essere risolti anche visivamente e su questionari. Tra i risultati, l'autrice evidenzia che non è stata riscontrata alcuna differenza significativa tra ragazzi e ragazze, mentre documenta differenze significative tra studenti e insegnanti: gli studenti hanno avuto bisogno di maggiori strumenti visivi dei loro insegnanti. Tra i fattori che determinano se un certo compito sarà affrontato in modo visivo o meno troviamo: il compito stesso, le istruzioni relative al compito (la consegna), le preferenze individuali e la cultura dell'ambiente di apprendimento, incluso il fatto che la visualizzazione sia apprezzata o meno. Agli estremi della gaussiana la ricercatrice ha trovato da una parte studenti che non facevano *mai* uso di visualizzazione, e dall'altra altri che ne facevano *sempre* ricorso, da lei chiamati "visualizzatori" (visualizers).

Ci si può chiedere quale sia la relazione tra visualizzazione e la capacità di risolvere i problemi. Sembra sensato aspettarsi che i buoni solutori di problemi

---

1 Per questa breve disamina si fa riferimento al contributo di Presmeg sull'Encyclopedia of Mathematics Education (2020), a cui rimando per i riferimenti bibliografici relativi agli autori citati.

siano anche buoni visualizzatori. Gli studi di Presmeg non confermano questa affermazione, perché secondo i suoi risultati gli studenti visualizzatori si distribuiscono abbastanza uniformemente rispetto alla capacità di problem-solving.[2] L'autrice conclude sottolineando che "è significativo notare che non tutti gli studenti con forti capacità spaziali, che sono in grado di utilizzare la visualizzazione nel loro pensiero matematico, *scelgano* di farlo" (Presmeg, 2020, p. 637, mia traduzione). Come evidenziato da Dreyfus in una conferenza plenaria al convegno PME nel 1991, gli studenti sembrano riluttanti a visualizzare in matematica: perché? Perché studenti che potremmo chiamare visualizzatori non sfruttano le loro forti capacità di visualizzazione quando risolvono problemi di matematica? Per rispondere a questa domanda, Presmeg ha esplorato le interazioni tra gli stili di insegnamento di 13 insegnanti delle scuole superiori e 54 studenti "visualizzatori" nelle classi di matematica di questi insegnanti e ha documentato che:

- gli studenti visualizzatori nelle classi degli insegnanti molto poco visualizzatori hanno tentato di seguire gli stili dei loro insegnanti (che non attivavano mai processi di visualizzazione) e il risultato è stato un insuccesso, con una prevalenza di memorizzazione senza comprensione;
- sorprendentemente, anche i visualizzatori con insegnanti visualizzatori hanno spesso incontrato difficoltà;
- *è la pedagogia degli insegnanti del gruppo intermedio a risultare ottimale per gli studenti*: questi insegnanti usano e incoraggiano metodi visivi di lavoro, ma allo stesso tempo sottolineano il ruolo dell'astrazione e della generalizzazione in matematica.

3. Dalla ricerca alla pratica didattica

Se consideriamo i documenti istituzionali in cui si fissano gli obiettivi didattici per le nostre scuole, il tema del vedere e dell'immaginare sembra trovare qualche spazio solo nel primo segmento scolastico, per poi sparire del tutto.
Nelle Indicazioni nazionali per il primo ciclo di istruzione troviamo un riferimento all'immaginare nella scuola dell'infanzia e successivamente, considerando la disciplina Matematica, soltanto due obiettivi che fanno riferimento in maniera esplicita a competenze di visualizzazione, entrambi nell'ambito di Spazio e figure:

- *costruire e utilizzare modelli materiali nello spazio e nel piano come supporto a una prima capacità di visualizzazione*, come obiettivo di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria;
- *visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali*, come obiettivo di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado.

[2] Qui l'autrice fa riferimento al quadro messo a punto da Krutetskii nel suo corposo studio sui buoni risolutori di problemi, condotto pochi anni prima.

Nello stesso documento, *vedere e osservare* e *prevedere e immaginare* sono posti come macro-obiettivi importanti per l'ambito della Tecnologia, al termine della classe quinta della scuola primaria, e *vedere, osservare e sperimentare* sono indicati come macro-obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado.
Se andiamo a vedere i documenti per la scuola secondaria, i termini *visualizzare*, *visualizzazione*, *vedere* e *immaginare* non compaiono affatto nelle Indicazioni nazionali per il Liceo classico, il Liceo linguistico e il Liceo delle scienze umane, mentre per il Liceo scientifico e il Liceo artistico si sottolinea l'importanza del vedere nello spazio nell'ambito del disegno e della storia dell'arte, ma anche qui non si fa alcun riferimento all'immaginare.
Sembra documentata l'evaporazione dell'importanza del saper vedere e del saper immaginare in matematica (e non solo), fino ad arrivare al parossismo di corsi universitari di geometria in cui non viene mai fatto alcun disegno, a vantaggio di metodi puramente analitici.
La "svalutazione della visualizzazione" nella pratica matematica in classe è un atteggiamento diffuso anche in altri Paesi (Presmeg, 1997) e potrebbe essere una causa importante delle difficoltà riscontrate negli studenti in merito alla visualizzazione: si tratta di una causa di origine *culturale*, che andrebbe approfondita ulteriormente, ma che certamente contrasta con la natura della matematica e con l'attività dei matematici del passato e del presente.
Nella conferenza saranno proposti alcuni esempi per i vari livelli scolastici, volti a contrastare questa causa e a offrire spunti didattici per promuovere il saper immaginare e il saper vedere, in sinergia con i più noti metodi analitici, per una pratica matematica efficace, coerente con la sua natura epistemologica e, perché no, accattivante per gli studenti.

Bibliografia

Anichini, G., Giacardi, L., Luciano, E. (a cura di) (2015). *Bruno de Finetti e l'insegnamento della matematica. Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà*, volume monografico di La Matematica nella Società e nella Cultura, sezione I, vol. VIII. UMI. Disponibile da: http://hdl.handle.net/2318/1572477

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 52*(3), 215-241.

De Finetti, B. (1967). *Il saper vedere in matematica*. Torino: Loescher.

Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors and Images (pp. 299-312), Mahwah, NJ: Erlbaum.

Presmeg, N. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. English (Ed.),

Presmeg, N. (2020). Visualization and Learning in Mathematics Education. In: S. Lerman S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 636-640). Springer, Cham. Disponibile da: https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007%2F978-3-030-15789-0_161.

Parole chiave: vedere; immaginare; visualizzare; immagini visive; visualizzazone e problem solving.

La complessità nel *definire* in matematica

Silvia Sbaragli
Dipartimento Formazione e apprendimento – SUPSI di Locarno, Svizzera

Abstract. *This paper presents the definition, which is the most typical mathematical enunciation. We report some results of a research conducted in Canton Ticino with 440 pupils at the beginning of secondary school. This research shows the difficulties of pupils in conceiving, understanding and formulating the definition. This linguistic act is far from the most usual description and is not always the subject of specific and focused work by teachers.*

Il saper interpretare, comprendere e formulare definizioni sono tra le competenze matematiche auspicate durante la scuola dell'obbligo. La definizione rappresenta un particolare tipo di enunciato sul quale verte buona parte del processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Nei libri di testo dei vari livelli scolastici, i diversi oggetti della matematica sono presentati tramite definizioni espresse nel registro linguistico, accompagnate in alcuni casi da rappresentazioni simboliche, grafiche o figurale, a seconda dell'età degli allievi e dell'ambito matematico coinvolto (Demartini, Fornara, Sbaragli, 2020; Demartini, Sbaragli, Ferrari, 2020). Ma che cosa si intende con *definizione* in matematica? Definire, risulta un atto "naturale" per gli allievi della scuola dell'obbligo? C'è attenzione didattica da parte dei docenti nei confronti della definizione in ambito matematico?[3]

1. Dal descrivere al definire in matematica

Nella lingua comune l'atto del *definire* non risulta molto distante dal *descrivere*, ma in matematica questi due termini assumono significati diversi l'uno dall'altro. Come asseriscono D'Amore e Fandiño Pinilla (2012, p. 36): «L'etimologia (del termine *descrivere*) è semplice ma problematica: viene dal latino "de" che indica compimento di azione e "scribere", scrivere. Ma sta ad indicare una cosa complessa che è quella di fare sì che un emittente faccia riferimento a fatto, persona, luogo, … e ne tracci con verosimiglianza una riproduzione in un qualche sistema descrittivo (per esempio semiotico) teso a far sì che il ricevente se ne possa fare un'immagine, un'idea, … figurale, o schematica, o fotografica che sostituisca l'originale». Dal punto di vista della

[3] Il presente contributo si colloca nel contesto della ricerca *Italmatica*. *Comprendere la matematica a scuola tra lingua comune e linguaggio specialistico* (progetto 176339 del Fondo Nazionale Svizzero per la Ricerca Scientifica), ideata e condotta dai due Centri competenze Didattica della matematica (DdM) e Didattica dell'italiano lingua di scolarizzazione (DILS) del Dipartimento Formazione e Apprendimento (DFA) della Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Italiana (SUPSI).

descrizione concepita come atto linguistico, il bambino fin da molto piccolo viene sollecitato a raccontare il mondo che lo circonda e che viene messo in gioco nei diversi contesti, ma in matematica si chiede prevalentemente agli allievi di comprendere e formulare definizioni degli oggetti matematici, non di descriverli. In matematica, l'allievo deve dunque acquisire la competenza di passare dall'atto del descrivere, più libero, personale e vicino alle sue abitudini linguistiche, all'atto più vincolante del definire. Tale passaggio non risulta naturale e intuitivo per gli allievi, soprattutto a causa delle caratteristiche linguistiche specifiche dell'enunciato definitorio matematico.
Nel *definire* si stabilisce il significato di una parola o di una espressione verbale mediante una frase costituita da termini il cui significato si presume già noto. Questa rappresenta la definizione in puro senso aristotelico: *definitio fit per genus proximum et differentiam specificam* (la definizione si esegue aggiungendo al genere prossimo la differenza che lo specifica).
Una caratteristica della definizione è di essere *compatta*: con poche parole si descrivono elementi che in matematica sono spesso una quantità infinita. Ad esempio, nella definizione: "I trapezi sono quadrilateri con almeno una coppia di lati paralleli", vengono contemplate le infinite figure che hanno questa caratteristica. "I trapezi" è detto *definendum*, gli elementi che si vogliono definire, mentre "sono quadrilateri con almeno una coppia di lati paralleli", è il *definiens*, il predicato retto dal verbo essere, che serve a definire. I termini della lingua comune e quelli specialistici ("quadrilateri", "lato" e "paralleli") presenti nel *definiens* dovrebbero essere tutti conosciuti dall'interlocutore. La definizione risulta così *precisa*, *concisa* e *densa*, perché in poche battute si forniscono numerose informazioni. È chiaro che queste caratteristiche la rendono allo stesso tempo complessa da essere compresa e gestita da parte degli allievi.
Questo procedimento di definire i singoli termini specialistici di cui si fa uso nel *definiens* non può andare avanti all'infinito; occorre decidere da quali termini si vuole partire in una teoria, lasciandoli privi di definizione esplicita, ma agganciandoli all'intuizione e all'esperienza precedente. Queste parole vengono dette "termini primitivi".
È interessante osservare come, per la matematica elementare, il concetto di definizione non sia mai sostanzialmente cambiato, anche se le singole definizioni dei termini specialistici si sono evolute nel tempo. Oltre alle già menzionate caratteristiche linguistiche, in ambito matematico la definizione ha storicamente sempre avuto la caratteristica di contenere solo informazioni *necessarie* e *sufficienti*, ossia di non dover risultare ridondante. È stato Aristotele stesso a mettere in evidenza nel suo *Organon* che una definizione, per essere ben fatta, deve essere chiara e non ridondante: «Del non porre la definizione in modo valido vi sono due parti: una consiste nel servirsi di un'espressione oscura (infatti chi definisce deve usare l'espressione più chiara possibile, giacché è al fine di conoscere che viene proposta la definizione); la

seconda si verifica se è enunciato il discorso definitorio di un numero di cose superiore al dovuto: ché tutto ciò che è posto in aggiunta nella definizione è superfluo» (Aristotele, 1996, p. 238). Da allora in poi la definizione matematica ha assunto tale caratteristica di *sinteticità* e di *eleganza*; caratteristica che in altre discipline non è ritenuta oggi così vincolante. Quanto espresso permette di evidenziare la differenza di significato che viene attribuita in matematica ai termini *definizione* e *descrizione*: quest'ultimo è spesso caratterizzato dalla sovrabbondanza di informazioni e non viene sostanzialmente utilizzato in ambito matematico.

2. Difficoltà nel definire in matematica

Pur essendo l'insegnamento della matematica particolarmente incentrato sull'atto del definire – ne sono una testimonianza le numerose definizioni presenti nei libri di testo scolastici di matematica fin dalla seconda primaria – non risulta semplice per gli allievi diventarne competenti. In una ricerca attualmente in corso in Canton Ticino, concernente il tema della definizione e basata sulla somministrazione di alcuni item a 440 allievi all'ingresso della scuola secondaria di primo grado, emergono diffuse difficoltà che mettono in evidenza la complessità di tale atto linguistico.

Alla richiesta di scrivere una definizione di quadrilatero, il 29,1% degli allievi risponde in modo corretto. In questa percentuale rientrano anche coloro che non rispettano la caratteristica della definizione richiesta da Aristotele, di non essere ridondante (20,2% degli allievi). Esigenza che è forte nel mondo matematico, ma che è distante dalla prassi degli studenti, abituati a descrivere la realtà che li circonda tramite aggettivi, sostantivi, descrizioni sovrabbondanti che rafforzano ciò che si vuole far percepire all'interlocutore. Alcuni protocolli risultano ridonanti nell'esplicitazione di che cos'è un quadrilatero (categoria chiamata: "essere"), altri nel presentarne le caratteristiche (categoria chiamata: "avere"). L'esempio "Una figura geometrica che è un poligono con 4 lati", risulta ridondante nell'"essere", in quanto per parlare di un quadrilatero bastavano i termini "figura geometrica" o "poligono", mentre il seguente risulta ridondante nell'"avere": "Un quadrilatero è un poligono con 4 lati e 4 angoli", essendo sufficiente dire 4 lati oppure 4 angoli. Altri protocolli risultano ridondanti sia nell'"essere" sia nell'"avere": "Una figura che ha 4 lati e 4 angoli ed è un poligono". Tra coloro che sbagliano a formulare la definizione (41,8%), la maggioranza fornisce informazione scorrette (29,3%), come ad esempio "Una forma con quattro lati tutti uguali", oppure incomplete (11,4%). La maggioranza di questi ultimi sorvola sul verbo "essere", passando direttamente alla descrizione delle caratteristiche delle figure: "Con 4 lati", altri sorvolano sull'"avere": "Il quadrilatero è una forma geometrica, un poligono", altri ancora risultano esemplificativi, ma non definitori: "Un quadrilatero può essere un rombo, un romboide, un quadrato e un rettangolo. I quadrilateri sono una famiglia

geometrica". Ci sono inoltre allievi che forniscono informazioni estranee al contesto come "Il quadrilatero è una famiglia di triangoli" (1,1%), non rispondono (27,7%) o dichiarano di non sapere la risposta (1,2%).
Le stesse tipologie di errori ritornano anche in altri item relativi alla definizione, con percentuali di errore anche maggiori, soprattutto quando la richiesta si complica come nel seguente caso: "Daniele ha scritto sul quaderno questa definizione di quadrato: "un quadrato è un quadrilatero con quattro lati della stessa lunghezza e quattro angoli della stessa ampiezza". La maestra Monica gli dice: "Ci sono tante definizioni di quadrato!". Aiuta Daniele a trovarne almeno un'altra, e scrivila".
In questo item solo il 9,5% degli allievi risponde in modo corretto, il 68,7% sbaglia, il 19,5% lo lascia in bianco e il 2,3% esplicita di non saperlo.
Le difficoltà degli allievi emerse in questa ricerca mettono in evidenza la complessità nel saper formulare tale atto linguistico. Pur essendo gli allievi sottoposti al confronto con questo genere di enunciati fin dai primi anni di scolarizzazione, non risulta così facile impossessarsene. Per comprendere e gestire espressioni di questo genere occorrono infatti notevoli competenze matematiche e linguistiche: conoscere il significato dei termini che vi appaiono, padroneggiare i concetti matematici coinvolti, aver dimestichezza con certi costrutti linguistici ecc. Il costo cognitivo di tale operazione rischia di essere molto alto per gli allievi, specie per i più giovani, che tendono a servirsi della lingua in modo narrativo, personalizzato, ricco di verbi, e di una deissi ancorata al tempo e al luogo della comunicazione. Per questa ragione occorre prevedere da parte dei docenti un lavoro profondo, specifico e attento su questo tipo di enunciato, mettendone in evidenza in modo esplicito le caratteristiche e le diversità rispetto alla più generale e frequente descrizione.

Bibliografia

Aristotele (1996). *Organon. Volume secondo*. A cura di Marcello Zanatta. Torino: UTET.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2012). Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, dimostrazione. Riflessioni matematiche e didattiche che possono portare lontano. *Bollettino dei docenti di matematica*, *64*, 33-46.

Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (2020). Se la sintesi diventa un problema. Alcune caratteristiche del linguaggio specialistico della matematica in prospettiva didattica. In J. Visconti, M. Manfredini, L. Coveri (a cura di), *Linguaggi settoriali e specialistici: sincronia, diacronia, traduzione, variazione.* Atti del XV Congresso Internazionale SILFI, Genova, 28-30 maggio 2018 (pp. 487-494). Firenze: Cesati.

Demartini, S., Sbaragli, S., & Ferrari A. (in corso di stampa). L'architettura del testo scolastico di matematica per la scuola primaria e secondaria di primo grado. *Italiano LuguaDue*.

Parole chiave: definizione; descrizione; difficoltà; ridondanza; enunciato.

LABORATORI PER LA SCUOLA DELL'INFANZIA, PRIMARIA, SECONDARIA DI PRIMO GRADO

Matematica creativa in classe: attività sfidanti, cooperative, autovalutabili

Annamaria Benzi
Istituto Comprensivo Bogliasco-Pieve Ligure-Sori, Genova

1. Creare per comprendere

Comprendere la matematica non è una capacità riservata solo ai "matematici". Infatti, sappiamo bene quante intuizioni squisitamente matematiche possono avere i bambini e le bambine in età scolare se lasciati liberi di agire. E la proposta è proprio questa: attività creative che stimolino i pensieri su argomenti ancora da scoprire e riescano a collegare i fondamenti della matematica alle esperienze vissute dai ragazzi a scuola, permettendo un approccio sereno alla matematica, disciplina storicamente ostica, attraverso una didattica esperienziale, laboratoriale e ludica.

2. La sfida: l'ingresso nella zona di sviluppo prossimale

Le attività si presentano come "giochi" da fare in coppia o in piccolo gruppo con modalità laboratoriale ed esperienziale e prevedono la costruzione del materiale di gioco. Ed è questo il momento in cui entrano in campo le intuizioni e la formulazione di ipotesi, la fase in cui l'insegnante diventa facilitatore e guida verso la costruzione delle competenze. Segue la fase della sperimentazione: con il materiale costruito si gioca per verificare che "tutto funzioni" e l'incontro con gli eventuali errori ha un sapore di sfida e di ricerca tesa al miglioramento. Le attività sono quindi: complesse e sfidanti, agite, significative e aperte, autentiche, collaborative, centrate sulle competenze.

2.1 ZSP e cooperative learning

Il costruttivismo sociale di Vygotskij, col suo concetto fondamentale di ZSP, ci indica come l'apprendimento possa essere veicolato da "esperti" che ci aiutano a colmare la distanza tra zona di sviluppo attuale e livello di sviluppo potenziale. Questi "esperti" in genere sono adulti ma possono anche essere dei pari con un livello di competenza maggiore.
Il *cooperative learning* (Johnson, & Johnson, 1999) permette di creare gruppi di lavoro cooperativi dove ognuno mette a disposizione del gruppo le competenze che padroneggia, diventando l'esperto a cui fare riferimento per quella competenza. In questo modo ogni specificità e differenza diventa una forza per il gruppo e viene valorizzato l'apporto di tutti gli alunni, nessuno escluso. La cooperazione, tra i gruppi e all'interno del gruppo, sostituisce la competizione del singolo favorendo la creazione di un ambiente di

apprendimento sereno e inclusivo. L'insegnamento diretto delle abilità sociali, come la comunicazione efficace, l'ascolto attivo, l'equa partecipazione e la collaborazione, rinforza la competenza sociale e favorisce lo star bene a scuola.

3. Autovalutazione e riflessione metacognitiva

Secondo Castoldi:

> La considerazione del punto di vista del soggetto rappresenta un momento irrinunciabile nella valutazione delle competenze, per una serie di ragioni che riguardano sia le opportunità di esplorazione del costrutto della competenza, sia il ruolo da assegnare allo studente nel processo valutativo. (Castoldi, 2016, p. 185)

Offrire agli alunni e alle alunne l'opportunità di auto valutarsi apre la strada a molteplici vantaggi e trasforma l'intero processo valutativo. La valutazione autentica non è pensata per misurare ma intenzionalmente progettata per *migliorare* le prestazioni di alunni e insegnanti e ciò può avvenire solo se i criteri di valutazione sono condivisi e i feedback sono immediati. Nel laboratorio dei giochi matematici il processo di valutazione inizia subito, con la valutazione diagnostica, segue l'intero percorso con la valutazione e autovalutazione del processo e si conclude con la valutazione e autovalutazione del prodotto. Questo avviene in modo fluido e in un continuum all'interno delle attività, con la partecipazione di docenti e discenti che sono alleati contro l'errore, a favore del miglioramento.
La condivisione del processo valutativo oltre a creare un forte legame emotivo relazionale tra alunni e insegnanti, rende trasparente l'intero percorso e mette gli alunni al centro del loro processo di apprendimento, permette loro di utilizzare il pensiero divergente, li responsabilizza e li rende autonomi.
Per la progettazione delle attività si è fatto riferimento anche ai seguenti testi: Steen (1990), Wiggins, & Mc Tighe (2005), nonché a MIUR (2012).

Bibliografia

Castoldi, M. (2016). *Valutare e certificare le competenze.* Roma: Carocci.

Johnson, D.W., & Johnson, R.T. (1999). *Learning together and alone: Cooperative, competitive, and individualistic*. University of California: Allyn and Bacon.

MIUR (Ministero dell'Istruzione, Università, Ricerca) (2012). *Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione*. Roma. Disponibile da: http://hubmiur.pubblica.istruzione.it//web/istruzione/prot7734_12

Steen, L. (1990). *On the Shoulders of Giants*. Washington D.C.: National Academy Press.

Wiggins, G., & Mc Tighe, J. (2005). *Understanding by Design.* Alexandria USA: ASCD.

Parole chiave: didattica laboratoriale; cooperative learning; costruttivismo sociale; valutazione autentica; autovalutazione.

Giocando si impara: attività per una matematica divertente in classe

Simona Locatelli e Francesca Locatelli
Istituto Comprensivo "Molino Vecchio", Gorgonzola

1. Introduzione

La matematica… una disciplina da sempre amata e temuta, una disciplina in grado di appassionare molti studenti, ma anche di spaventarli con formule, numeri e problemi tanto astratti da non riuscire a coglierne l'intrinseco legame con il reale. Una disciplina però che più facilmente di altre si presta a essere approcciata attraverso il gioco. Il percorso proposto nel laboratorio vuole essere un'esplorazione di possibilità che attraverso l'approccio ludico permettano di acquisire contenuti e nel contempo di divertirsi, lasciando ampio spazio allo sviluppo di competenze trasversali e interdisciplinari. Il percorso proposto prevede esempi di giochi classici e inediti da effettuare in aula e giochi multimediali utili per insegnare matematica divertendosi anche attraverso la didattica a distanza.

1. Il gioco – Capitolo 1

Il gioco nel processo di insegnamento-apprendimeno ha una valenza sia educativa, sia didattica. Educativa in quanto favorisce l'integrazione, la cooperazione, il superamento delle paure, l'interiorizzazione delle regole; didattica poiché attiva competenze, conoscenze e abilità. L'approccio ludico inoltre favorisce l'apprendimento duraturo. Se osserviamo un bambino quando gioca, fin da quando è molto piccolo, si impegna con tutto sé stesso: è coinvolto e immerso totalmente nel gioco. Questo impegno lo aiuta a consolidare competenze già acquisite, ma lo costringe anche ad avvicinarsi a nuove competenze per poter trovare strategie per migliorarsi o per vincere il gioco. C'è qualcosa di intrinseco nel gioco che lo spinge a porsi domande e trovare soluzioni, a scontrarsi con la realtà, a essere critico nei confronti di sé stesso e degli altri. In ogni gioco c'è sempre qualcosa che tutti vorremmo fare in più come nei videogiochi che tanto attirano i ragazzi: la logica che muove il videogioco è quella di voler raggiungere il livello successivo, quello più sfidante. Nessuno si divertirebbe giocando sempre lo stesso livello. Un'attività di gioco che all'apparenza pare così libera può essere efficacemente usata a nostro vantaggio.

Naturalmente possiamo sfruttare tutti questi aspetti positivi anche all'interno della nostra didattica della matematica. Come le regole con le quali giochiamo sono parte del gioco e servono anche per divertirsi così, allo stesso modo, nella matematica, le regole, i termini matematici, le formule, sono il modo per giocare e imparare. È proprio così: imparare ad affrontare un gioco e imparare ad affrontare la matematica è un parallelismo reale. E se si perde la partita avremo la possibilità di chiedere la rivincita e ricominciare.

2. Proposte di giochi da fare in classe – Capitolo 2

Attività per il primo ciclo: l'agenda impazzita; il Contatappi (ordine numerico, conoscenza delle cifre, quantità, successioni); calzini spaiati (insiemi, coppie, caratteristiche comuni, classificazione); il gioco Fantascatti (inibizione della risposta, logica, concetto di NON); i Bicchierini Sprint (attenzione, pianificazione, destrezza); le carte GiocaAmici (v. capitolo 2.1).
Attività per il secondo ciclo: costruzione del Juan pong chi (strategia, logica, pianificazione), Panic Lab (potenziamento della memoria di lavoro); costruzione dell'*Indovina chi* della geometria (classificazione); Gioco a dadi per le aree (concetto di superficie).
Buone pratiche: enigmi settimanali (v. rivista Prisma con giochi a vari livelli); festa del Pi-greco (libri dedicati); reperimento o costruzione di giochi classici come Tangram, Monopoli, dama e scacchi, risoluzione di problemi famosi (v. Fibonacci e problema dei conigli); compito autentico: costruzione di un *Indovina chi* sulle figure geometriche (con rubriche valutative e competenze chiave europee).

2.1 Strumenti del Progetto Giocamici – Capitolo 2.1

Gli strumenti *Giocamici* si trovano in dotazione nell'omonimo testo per il primo ciclo. Si tratta di tre strumenti ideati per le tre classi con giochi inediti per imparare la matematica giocando. L'aspetto veramente particolare e unico di questi giochi è che a ciascun gioco è abbinato il potenziamento di funzioni e competenze diverse: si passa dal potenziamento della memoria, del calcolo orale, della manualità fine, ma anche del linguaggio che sono tutte abilità utili in campo matematico ma anche in generale per affrontare in modo efficace il percorso scolastico.

3. Giochi da fare in modalità ibrida

Giochi matematici proposti dall'Università Bicocca nella piattaforma Wims (wims.matapp.unimib.it/wims); Kahoot (sfide divertenti per tutte le discipline); Wordwall e Learningapps.org (per tenere traccia dei progressi degli alunni); Teacher Desmos (per creare attività e monitore in tempo reale).

Parole chiave: giochi; laboratorio di matematica; scuola secondaria di primo grado; competenze trasversali; didattica a distanza.

In classe con i "Problemi al centro"

Sergio Vastarella
NRD Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Università di Bologna
Istituto Comprensivo Cembra

1. Il progetto "Problemi al Centro"

All'inizio dell'anno scolastico 2019-2020 Giunti Scuola ha lanciato un progetto nazionale per riportare all'attenzione dei docenti italiani di scuola primaria l'importanza di un corretto uso dei problemi di matematica nei processi d'insegnamento-apprendimento dedicati ai bambini dai 5/6 ai 10/11 anni (Di Martino & Zan, 2019). Nonostante le difficoltà create dalla pandemia per Covid-19, il progetto "Problemi al Centro" ha coinvolto decine di migliaia di docenti e alunni in tutta Italia che, prima in presenza e poi in parte a distanza, hanno potuto lavorare con i tre diversi kit (Cl. I, Cl. II-III, Cl. IV-V) contenenti 10 proposte ciascuno, le guide e i suggerimenti svilupati con il contributo dei docenti dell'Università di Pisa Rosetta Zan e Pietro Di Martino e del loro gruppo di lavoro.
Il progetto "Problemi al Centro" ha permesso a migliaia di insegnanti di lavorare sugli stessi problemi impiegando delle strategie consigliate che, una volta sperimentate in aula, venivano confrontate tra i docenti e gli esperti nell'omonima pagina/community creata su Facebook (Vastarella, 2020a). Questo ambiente, che a fine giugno 2020 contava circa 7500 iscritti, ha rappresentato una vera e propria agorà virtuale in cui gli esperti hanno offerto momenti di formazione, spunti di riflessioni e commenti alle moltissime attività d'aula narrate con entusiasmo dai docenti, che a loro volta hanno potuto avere conferme, suggerimenti e ulteriori input per continuare a impiegare in modo efficace i problemi di matematica nel proprio lavoro.
Alla fine dell'anno scolastico, il numero 10 della rivista "La Vita Scolastica" è stato interamente dedicato al progetto, per offrire una riflessione d'ampio respiro sull'uso dei problemi nell'insegnamento della matematica a livello primario e per raccontare, attraverso le parole di diversi dei docenti coinvolti, le esperienze, le sensazioni, le emozioni e le varie sfide affrontate da insegnanti e bambini con i "Problemi al Centro" della didattica d'aula (Vastarella, 2020b).

2. L'importanza dei problemi nella didattica della matematica

Spesso gli esperti in matematica descrivono l'attività con i problemi come il cuore della disciplina stessa: grazie ad essi vengono messi in moto processi matematici significativi quali esplorare, congetturare, argomentare, verificare, e ancora definire e rappresentare.

Lavorare in modo corretto con i problemi consente agli allievi di impiegare, sviluppare e rafforzare molte e diverse competenze utili a percepire la Matematica come una disciplina d'idee, ragionamenti, creatività, comunicazione e collaborazione, consolidando così il proprio spirito critico.
Grazie ai problemi si può quindi promuovere negli allievi un'adeguata visione della Matematica e un adeguato senso di autoefficacia che si traducono in un atteggiamento positivo verso la disciplina stessa (Di Martino & Zan, 2019).

3. Le strategie promosse dai "Problemi al Centro"

Oltre a fornire ai docenti i testi dei problemi su cui lavorare, Giunti Scuola ha proposto molti momenti di formazione, confronto e scambio d'idee tra gli esperti e i partecipanti al progetto. Inoltre, per consentire ai docenti di lavorare al meglio con i problemi di matematica assieme ai propri allievi, sono state fornite delle indicazioni operative di base: (1) l'attività si svolge in classe e non è oggetto di valutazione sommativa; (2) si favorisce il lavoro di tipo collaborativo e in generale una didattica di tipo laboratoriale; (3) si lascia il tempo necessario: per la maggior parte dei problemi un'ora è sufficiente, ma se non lo fosse, si può riprendere il lavoro durante l'incontro successivo.

3.1 Per una valutazione formativa

Per consentire ai docenti di monitorare l'evoluzione dell'atteggiamento degli allievi nei confronti della Matematica, sono stati proposti alcuni strumenti di osservazione utili a individuare la visione dei bambini della Matematica e il senso di autoefficacia che associano a questa disciplina, in particolare nel contesto dei problemi: (1) il disegno: "Disegna che cosa ti fa venire in mente la matematica"; (2) il gioco del "se fosse" con protagonista la matematica e con consegna del tipo: "Se fosse un cibo la matematica sarebbe… Perché?"; (3) frasi da completare, ad esempio: "Secondo me la matematica a scuola s'insegna perché…"; (4) il tema autobiografico, ad esempio "Io e la matematica / Il mio rapporto con la matematica"; (5) un questionario sull'atteggiamento riguardo ai problemi.

Bibliografia

Di Martino, P., & Zan, R. (2019). *Problemi al centro. Matematica senza paura*. Firenze: Giunti Scuola.

Di Martino, P., & Zan, R. (2020). *Problemi per crescere.* Firenze: Giunti Scuola.

Vastarella, S. (2020a). Problemi che passione. *La Vita Scolastica, 74*(10), 38-39. Firenze: Giunti Scuola.

Vastarella, S., (a cura di) (2020b). Diari di bordo. *La Vita Scolastica, 74*(10), 40-51. Firenze: Giunti Scuola.

Parole chiave: problem posing; problem solving; cooperazione; didattica laboratoriale; valutazione formativa.

LABORATORI PER LA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO E SECONDO GRADO

Il laboratorio di matematica: riflessioni e idee per pratiche didattiche efficaci

Fabio Brunelli[1], Antonella Castellini[2] e Federica Ferretti[3]
[1]IC Masaccio (FI); [2]IC 1 Poggibonsi (SI); [3]ForMATH Project;
[3]NRD Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Università di Bologna

1. L'idea di laboratorio di matematica

> Pour amener, non seulement les élèves, mais aussi les professeurs, mais surtout l'esprit public à une notion plus exacte de ce que sont les Mathématiques et du rôle qu'elles jouent réellement dans la vie moderne, il sera nécessaire de faire plus et de créer de vrais laboratoires de mathématiques. (Borel, 1904/2002)

Nel 1904 Borel usa il termine *laboratorio di matematica* indicando questa modalità come necessaria per condurre sia alunni che docenti (molto interessante e degna di riflessione per l'epoca questa doppia apertura) verso una più corretta idea di Matematica. In Italia vediamo comparire questo termine per la prima volta nei documenti ufficiali del Ministero molti anni dopo ed esattamente nel 1979 con i programmi per la scuola media in cui si riporta: «Si sottolinea l'importanza di questa attività di laboratorio non solo, come è ovvio, per le scienze sperimentali, ma anche per la matematica (procedimenti di misura, rilevazioni statistiche e costruzioni di grafici, costruzioni di geometria piana e spaziale ecc.)» (MPI, 1981, p. 40).
Certamente, negli ultimi decenni, si parla sempre più di *laboratorio di matematica* (Bolondi, 2006; 2016) e questo termine sta diventando una parola chiave per quanto riguarda i processi di apprendimento-insegnamento della matematica; all'interno del panorama della didattica della matematica se ne trovano diverse definizioni.
In seguito riportiamo il termine adottato nel progetto Matematica per il cittadino, avviato nel 2000, che nei Curricoli UMI 2001-2003-2004 (https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/) propone l'idea di laboratorio come un ambiente assimilabile a quello della bottega rinascimentale, in cui gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. In questo ambiente, la costruzione di significati diventa strettamente legata sia all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività sia alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività.

2. I laboratori come metodologie didattiche efficaci

Condividiamo quindi l'idea di laboratorio intesa come metodologia didattica, volta alla promozione di pratiche matematiche che coinvolgono in maniera attiva l'allievo (Paola, 2008), in cui si vuole favorire l'operatività dell'allievo e le sue interazioni con i compagni e con l'insegnante. Riteniamo fondamentale inserire il laboratorio nelle attività matematiche di classe, in modo tale da veicolare e stimolare la progettualità degli studenti in un'ottica socio-costruttivista. Ed è proprio in questa direzione in cui vengono progettati e realizzati i laboratori per studenti che ForMATH Project conduce da anni in numerose scuole sul territorio nazionale e in diversi eventi divulgativi. E sono riflessioni inerenti a metodologie didattiche efficaci come il *laboratorio di matematica*, che costituiscono il cuore dei percorsi formativi per insegnanti dei diversi livelli scolastici ideati e condotti da ForMATH Project e dagli autori del presente contributo; sarà questo il tema centrale dell'intervento proposto che verterà sul nucleo tematico *Relazioni*. Fino a una ventina di anni fa parlare di "relazioni" in matematica era introduttivo al parlare di funzioni e costituiva quindi un discorso prevalentemente rivolto alla scuola secondaria di secondo grado e all'università. Negli ultimi anni, le "relazioni" hanno assunto un ruolo cruciale in diversi ambiti di contenuto della matematica, diventando il cuore di progettazioni laboratoriali innovative e trasversali che coinvolgono verticalmente studenti di diversi gradi scolastici.

Bibliografia

Bolondi, G. (2006). I mille significati della locuzione "laboratorio di matematica". In B. D'Amore, & S. Sbaragli (Eds.), *Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la matematica" n. 20, Il convegno del ventennale*, (pp. 147-150). Bologna: Pitagora.

Bolondi, G. (2016). Il laboratorio di matematica nelle Indicazioni curricolari per la scuola italiana. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *39*(6 A/B), 551-562.

Borel, E. (2002). Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire, *Gazette des Mathematiciens*, 93, 47-64). (Conferenza tenuta il 3 marzo 1904 al Musée Pédagogique di Parigi) Disponibile da: http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf

MPI (Ministero della Pubblica Istruzione) (1981). *Scuola Media Statale (Programmi e orari di insegnamento. Criteri orientativi per le prove d'esami di licenza e relativa modalità di svolgimento)*. Roma: Istituto Poligrafico dello Stato.

Paola, D. (2008). Il laboratorio per l'insegnamento-apprendimento della matematica: le proposte rivisitate della commissione UMI, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 31*(6A/B), 517-552.

Parole chiave: laboratorio di matematica; metodologie didattiche; relazioni matematiche; interazioni; trasversalità.

È ancora possibile insegnare geometria nella scuola di oggi?

Giovanna Guidone
Liceo Scientifico "T.C. Onesti", Fermo;
Pearson

1. Introduzione

Classi più numerose, tempi più esigui, alunni sempre meno educati al ragionamento critico, attività extracurricolari che imperversano in tutti i momenti: sembra che la pianticella fragile del ragionamento induttivo – da coltivarsi con pazienza, tempo e cura da parte di alunni e docenti – non possa più crescere nel terreno della nostra scuola secondaria.

2. Quale approccio alla geometria?

Negli anni si sono susseguite molte proposte: da quella di Euclide o di Hilbert, a quella di Klein, passando per i quattro assiomi di Birchoff, per finire con le proposte pragmatiche come quelle di Lange e Villani. Non ha senso chiedersi quale approccio seguire se prima non ci domandiamo che cosa vorremmo ottenere dal percorso di geometria nel biennio.

3. Quali obiettivi?

Qualche anno fa, Maria Dedò propose di costruire il percorso della geometria attorno a cinque obiettivi: osservare, misurare, rappresentare, classificare, rappresentare e argomentare**.** Le proposte contenute in Dedò (2016) sono ricche di stimoli per l'insegnamento in classe. Nella prassi didattica, però, questi temi si confrontano con la fattibilità nel tempo-scuola. Tutti noi sperimentiamo la frustrazione descritta all'inizio e con essa dobbiamo fare i conti. Pertanto, lo sforzo deve ancor più concentrarsi nell'individuare gli obiettivi che ci poniamo. Ritengo che l'analisi e le proposte siano molto diverse tra loro, a seconda del tipo di scuola superiore cui ci si riferisce.

4. Un cambio di paradigma nella conoscenza

Uno degli obiettivi principali che il Liceo Scientifico affida all'insegnamento della Matematica è quello di costruire il cosiddetto *metodo*, che consentirà agli studenti di affrontare con successo gli studi universitari che sceglieranno. Siamo però di fronte a un cambio di paradigma nella conoscenza (Baricco, 2018): prima il mondo era un iceberg a testa in giù: bisognava imparare a scavare per arrivare all'essenza. Oggi la punta dell'iceberg è visibile a tutti: l'accesso immediato alle nozioni impone di chiederci seriamente che cosa

serva ai nostri studenti. Ed ecco che la geometria torna a essere un'occasione esemplare per imparare a filtrare le informazioni, a catalogarle, a metterle in relazione in un quadro unitario.
In quest'intervento illustrerò alcuni possibili percorsi nei quali il faticoso lavoro sull'impianto logico viene mediato dall'attenzione al reale, dallo sguardo oltre Euclide, da prassi didattiche vicine agli studenti del XXI secolo.

Bibliografia

Baricco, A. (2018). *The game*. Torino: Einaudi.

Birkhoff, G.D., & Beatley, R. (1999). *Basic Geometry*. New York: AMS Chelsea Publishing.

Dedò, M. (2016). *Alla ricerca della geometria perduta* (Vol. 1). Milano: Egea.

Mammana, C., & Villani, V. (a cura di) (1998). *Perspectives on the Teachnig of Geometry for the 21st Century*. Dordrecht: Springer.

Villani, V. (2007). Riflessioni su possibili percorsi nell'insegnamento della geometria. *Insegnamento della matematica e delle Scienze integrate*, *30*(6A/B), 623-644.

Parole chiave: insegnamento; geometria; Euclide; dimostrazioni; assiomatica.

SEMINARI
PER LA SCUOLA DELL'INFANZIA, PRIMARIA E SECONDARIA DI PRIMO GRADO

Verso la geometria piana: descrivere, costruire, trasformare, muovere la forma geometrica sul piano

Anna Aiolfi
Istituto Comprensivo "Daniela Furlan", Spinea, Venezia

1. Dalle idee ingenue al concetto geometrico

Alla scuola dell'infanzia si costruiscono le prime idee di forma: i bambini manipolano oggetti e li confrontano, notano le caratteristiche evidenti e le generalizzano. Spesso vengono mostrate figure di forme geometriche che imparano a nominare senza però capire il significato. Queste idee ingenue non possono bastare, se si vuole passare dagli oggetti tridimensionali alla concettualizzazione delle forme piane di cui sono composti. Serve un percorso lungo fatto di occasioni concrete e ragionate, dove i bambini possono sperimentare e costruire una "immagine mentale di forma" da condividere con gli altri, ragionando sulle caratteristiche che la fanno riconoscere. Contare i vertici e i lati di una forma, sia essa tridimensionale o piana, è solo un primo passo, bisogna capire le relazioni tra le parti, il significato della loro uguaglianza e soprattutto serve provarlo, verificarlo e comunicarlo agli altri.

2. Costruire e trasformare

Per accompagnare il processo di astrazione dei bambini ci vuole tempo e molte occasioni per osservare, descrivere, confrontare e, mettendo in relazione i dati a disposizione, costruire modelli sensati.
Si può partire dall'osservazione di oggetti comuni per estrapolare la forma, scarnificandone la struttura, oppure si può partire dagli elementi che compongono la forma come linee, rette, segmenti, angoli, trovando dei buoni mediatori come fili, stecchini, cannucce che si prestano a dare forma all'idea. L'esperienza proposta parte dalla descrizione della forma di un foglio A4 e continua con le azioni che si compiono sulla sua superficie, piegatura e strappo, per costruire in modo dinamico e interattivo una forma quadrata, le cui caratteristiche vengono verificate passo dopo passo, azione dopo azione. La descrizione di ciò che si fa e la riflessione che ne segue sono momenti importanti di condivisione che portano alla costruzione di copioni procedurali. Costruire e trasformare sono parole chiave in questo processo: per costruire servono idee, gesti, tentativi, errori, verifiche e molti ragionamenti; per trasformare serve anche immaginare e prevedere. Nulla è lasciato al caso, tutto diventa occasione per confrontare, riflettere, modificare, fino a ottenere modelli soddisfacenti pronti a essere rimessi in discussione in momenti successivi.

2. Piegare, combaciare, sovrapporre

Dopo vari tentativi i bambini ottengono da un foglio rettangolare con la tecnica della piegatura la forma quadrata che viene staccata con uno strappo dalla parte che non serve. Questa parte avanzata viene subito riutilizzata per creare altre forme quadrate sempre più piccole. Durante queste manipolazioni i quadrati di carta vengono più volte piegati e avvicinati per far combaciare le parti, sovrapposti e confrontati per verificare le uguaglianze e le differenze. Tutte queste azioni ripetute e sperimentate rendendo i bambini sempre più padroni della gestualità e delle procedure. Anche le spiegazioni si affinano in racconti personali dove vengono descritte sia le "mosse giuste" (cosa si fa prima e cosa dopo e come lo si deve fare) sia i "trucchi" che facilitano l'operazione (come fermare il movimento della piegatura con un dito sul vertice del foglio).
Sempre piegando il foglio A4 è stata sperimentata la costruzione del triangolo equilatero che ha generato nuovi confronti e ragionamenti.

3. Movimenti sul piano

Sul piano del tavolo, le forme vengono avvicinate, trascinate, capovolte, ruotate, confrontate. Movimenti ancora ingenui che però aprono discorsi sulle trasformazioni geometriche, in modo particolare sulle isometrie e sulle similitudini. Sempre sul piano le molte forme realizzate sono state utilizzate dai bambini per creare abbinamenti e costruire tassellazioni. Le discussioni del gruppo, generate dal fare stesso, si focalizzano sulla costruzione dell'angolo giro, fatto fondamentale per ottenere un ricoprimento del piano. Il fare e il pensare insieme su contesti matematici appositamente "apparecchiati" generano una "tensione cognitiva" dove non è tanto importante il "cosa" si fa ma il "come" lo si fa. In questo clima argomentativo non c'è spazio per la spiegazione adulta, ma solo per la ricerca di risposte soddisfacenti, che rende nel tempo i bambini capaci di pensare e scegliere in modo autonomo e critico.
È stato altresì importante privilegiare nei bambini l'acquisizione di modelli interpretativi e generativi, nati dal ragionamento in un tempo necessariamente lungo per dare modo al nuovo di assestarsi con i saperi già posseduti.

Bibliografia

Aiolfi, A. (2018). Parliamo di forma. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la matematica" n. 30: Didattica della matematica e professionalità docente* (pp. 79-80). Bologna: Pitagora.

Marastoni, G. (2017). Facciamo geometria. *Quaderni di Cooperazione educativa*. Bergamo: Junior.

Merlo, D. (2019). Oggetti forme e strutture. La geometria nei primi anni di scuola. *Quaderni di Cooperazione educativa*. Bergamo: Junior.

Parole chiave: forma; confronto; descrizione; procedura; trasformazioni geometriche.

Educazione alla probabilità già dalla primaria

Gianfranco Arrigo
NRD Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Università di Bologna

1. La situazione nella scuola odierna

Capita talvolta di leggere, qua e là, che il calcolo delle probabilità è una disciplina (relativamente) nuova e con questo si tenta di giustificare il ritardo, la reticenza – direi – che la scuola in generale ha nei confronti dell'educazione probabilistica. Succede insomma quello che già ebbi modo di sottolineare a proposito della combinatoria.[4] Senza voler passare per il "disciplinarista" che vede solo la propria materia, mi sento obbligato ad attirare l'attenzione sul fatto che se si introduce il concetto di probabilità solo nella scuola secondaria di secondo grado si va incontro a un evidente errore di struttura dell'insegnamento della matematica. Ciò per diverse ragioni. Prima di tutto ricordo e sottolineo che l'acquisizione di un concetto richiede un processo graduale di maturazione e tempi lunghi che sicuramente la scuola liceale non può soddisfare; inoltre, allo stato attuale, questi studenti si trovano a dover digerire un insieme di definizioni e di formule senza aver avuto, in precedenza, un'adeguata fase euristica, propedeutica a una corretta concettualizzazione.
Certo, nei nuovi piani di studio non si dimentica la probabilità e gli insegnanti più interessati alla matematica hanno capito e stanno già lavorando bene, proponendo situazioni probabilistiche a classi di alunni che apprezzano questa tematica perché, nella loro situazione di giovani immersi nella odierna società della comunicazione, riconoscono che sono problemi molto presenti nella vita di tutti i giorni. Sta di fatto però che la maggior parte degli studenti continuano ad arrivare a pochi mesi dalla maturità senza essere passati dalla citata e importante fase propedeutica all'apprendimento della probabilità.

2. Eppur… si può fare!

Già nelle prime classi della primaria si possono proporre agli alunni situazioni probabilistiche, stimolanti e non difficili, nelle quali appare anche l'evento aleatorio. Casualità che, se non affrontata in senso matematico, contribuisce a cristallizzare idee errate sulla fortuna, sull'interpretazione di una previsione, su ciò che si può definire certo, probabile, impossibile. Per esempio nel lancio di un dado ideale è certo che si ottiene un punteggio da 1 a 6, è probabile (ma non certo) che si ottenga un multiplo di 3, è impossibile che si ottenga il risultato 7. Se il numero di risultati possibili è finito (come succede nella scuola di base) al risultato certo associamo la probabilità 1 e a quello

[4] Vedere in Bibliografia gli Atti del 2019 di questo Convegno.

impossibile la probabilità 0. E agli altri, quale probabilità possiamo associare? Questa è una domanda che può introdurre l'alunno nel nuovo e stimolante territorio probabilistico. Diremo che la probabilità che lanciando un dado si ottenga un multiplo di 3 è 2/6 perché i punteggi multipli di 3 sono 2 e i risultati possibili sono 6. È un semplice rapporto tra due numeri naturali che possiamo esprimere in diversi modi:

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=\frac{10}{30}=0,\overline{3}=33,\overline{3}\,\%=\ldots$$

quindi un numero (per ora) razionale compreso tra 0 e 1.
Per rafforzare le prime immagini mentali è utile anche proporre agli alunni attività di stima della probabilità, ancor prima di giungere a una quantificazione della stessa. Per esempio, mettere l'alunno di fronte a una situazione del tipo:
Hai davanti a te due urne (opache). Nella prima vi sono 2 palline bianche e 4 nere, nella seconda 4 bianche e 10 nere. Vinci un bel premio se estrai da un'urna una pallina bianca. Da quale urna preferisci pescare?
Fra le risposte degli alunni ce ne sono due, assai frequenti, che dicono molto sull'immagine di probabilità in formazione:

- *2 su 4 dovrebbe essere uguale a 4 su 8, quindi la seconda urna con 4 su 10 conviene non sceglierla*;
- *nella prima ci sono solo 2 palline bianche, mentre nella seconda 4, quindi…*

Col tempo, gli alunni migliorano la propria immagine di probabilità.
Si possono allora proporre situazioni come questa.
Hai davanti a te urne con i seguenti contenuti:

urna 1	urna 2	urna 3	urna 4	urna 5
○○○ ●●●●●●	○○ ●●●●	○ ●●	○○○○○ ●●●●●●●●●●	○○○○ ●●●●●●●●

Vinci se estrai una pallina bianca: da quale urna ti conviene pescare?
L'alunno che dà risposte del tipo «per qualunque urna, la probabilità di estrarre una pallina bianca è la stessa», ha già fatto un passo importante verso la costruzione del concetto di probabilità matematica.

Bibliografia

Adler, I. (1969). *Statistique et probabilités pour aujourd'hui*. Paris: O.C.D.L.
Arrigo, G. (2019). Educazione al pensiero combinatorio già dalla primaria. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la matematica" n. 33: Didattica della matematica e professionalità docente* (pp. 99-100). Bologna: Pitagora.
Arrigo, G., Maurizi, L., Minazzi, T. & Ramona, V. (2011). *Combinatoria, Statistica, Probabilità*. Bologna: Pitagora.
Engel, A. (1976). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Stuttgart: Klett Verlag.
Taillard, F. (1996). *Probabilités et statistique*. Genève: Ed. du Tricorne.

Parole chiave: scuola primaria; probabilità; impossibile; certo; probabile.

Discussioni fra alunni della scuola primaria sul concetto di altezza di un poligono

Miglena Asenova[1] e Ines Marazzani[2]
[1]Università di Palermo; [1,2]NRD Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

1. Introduzione

L'attività che viene presentata durante il seminario si inserisce nell'ambito di una ricerca più ampia, sulle potenzialità delle costruzioni con riga e compasso nell'avviare i bambini della scuola primaria al ragionamento matematico e in particolare alla dimostrazione. Tali attività hanno portato i bambini coinvolti ad acquisire una buona padronanza del linguaggio specifico, di quel *vocabolario tecnico* della geometria, fondamentale per poter esprimere ciò che è necessario discernere visualmente in una figura (Duval, 2005). Tale padronanza ha consentito loro di ampliare gli strumenti di controllo usati durante le attività. Uno strumento importante in questo senso sono le definizioni degli enti geometrici (naturalmente a livello logico e linguistico idoneo all'età e non imposte agli alunni, ma negoziate con loro), in quanto esse sono, accanto alle premesse, gli strumenti di giustificazione di base nelle dimostrazioni. Il concetto matematico intorno al quale si snodano i due protocolli analizzati durante il seminario è quello di altezza di un poligono, concetto che è spesso segnalato come fonte di misconcezioni non solo per gli studenti (Sbaragli, 2017).

2. Descrizione dell'attività

Le attività a cui si riferisce il seminario sono state svolte in una pluriclasse (IV e V primaria), nel primo quadrimestre dell'anno scolastico 2019-2020. Sono state create delle occasioni in cui i bambini potevano discutere le soluzioni di compiti assegnati per casa, consistenti in un qualche genere di costruzione geometrica. Le discussioni si sono svolte a volte in piccoli gruppi, senza l'intervento diretto dell'insegnante: altre volte la discussione è stata condotta dall'insegnante stessa, in un confronto uno-a-uno con lo studente. Le discussioni sono state registrate, trascritte e analizzate.

3. Quadro teorico di riferimento

Secondo Radford, gli oggetti matematici sono oggettivabili come pattern fissi per mezzo di pratiche mediate socialmente da artefatti (Radford, 2008). Questo quadro teorico consente di inquadrare *l'emergenza* degli oggetti matematici. Dall'altro lato, nell'approccio strutturale e funzionale di Duval

(1995), gli oggetti matematici sono degli invarianti rappresentazionali. Questa prospettiva consente di inquadrare in maniera *referenziale* gli oggetti matematici. I due approcci possono essere coordinati in accordo con le loro funzioni complementari (D'Amore, Fandiño Pinilla, Santi, & Sbaragli, 2012).

3. I risultati

Dal primo dei due protocolli analizzati durante il seminario si evidenziano due diversi stadi nell'emergenza dell'oggetto "altezza". Un primo stadio, riscontrato in uno studente, in cui sembrano convivere due diverse idee di "altezza", che si presentano come oggetti grafici concreti distinti (altezza come segmento, nel senso di segno grafico continuo, in accordo con la definizione nota allo studente, e altezza come segno grafico tratteggiato, usato nel libro di testo). Un secondo stadio, esemplificato da un altro studente, in cui egli mostra di padroneggiare un oggetto matematico "altezza" che si presenta come un invariante rispetto a diverse rappresentazioni semiotiche. Nel primo dei due stadi la definizione di altezza non svolge il ruolo di strumento di controllo sulla coerenza delle affermazioni, mentre nel secondo tale ruolo sembra essere presente. Dall'analisi del secondo protocollo l'oggetto "altezza" emerge come significato condiviso dalle discussioni degli studenti; esso viene oggettivato in seguito a una conciliazione "pragmatica" tra le caratteristiche di due diverse definizioni (altezza come segmento o come distanza). La conclusione alla quale giungono gli studenti è che il ricorso a una o all'altra definizione dipende dall'esigenza alla quale la definizione deve rispondere, sulla base del compito assegnato.

Tale posizione pragmatica sembra testimoniare una consapevolezza del ruolo della definizione come strumento di controllo semantico, consapevolezza indispensabile lungo il percorso verso il suo impiego nelle dimostrazioni.

Bibliografia

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Santi, G., & Sbaragli, S. (2012). Some Relations between Semiotics and Didactic of Mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 11*(1-2), 35-57.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la geometrie: Developpement de la visualisation, differenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 10, 5-53.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.

Sbaragli, S. (2017). Convinzioni di allievi e docenti sul concetto di altezza di poligoni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 37*(2A/B), 227-248.

Parole chiave: altezza; definizioni; oggettivazione; rappresentazioni; dimostrazione.

Giochi matematici interattivi, a distanza e in presenza

Giorgio Bolondi
Freie Universität Bozen – Libera Università di Bolzano

1. Il laboratorio in contesto di lockdown

L'emergenza Covid-19 ha costretto gli insegnanti a destrutturare e ricomporre i propri percorsi di insegnamento, rendendo al tempo stesso difficilmente implementabili molti strumenti di valutazione degli apprendimenti. In particolare, ha messo in crisi, o perlomeno in *stand-by*, la pratica del *laboratorio di matematica*. Nelle Indicazioni Nazionali per il Primo Ciclo di Istruzione l'idea di Laboratorio di Matematica è centrale:

> In matematica (…) è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive (MIUR, 2012).

L'impossibilità della compresenza fisica ha drasticamente ridotto i momenti in cui effettivamente gli insegnanti sono riusciti a creare vere situazioni di laboratorio, già impegnative in momenti normali. D'altra parte, la ricerca ha dimostrato che questa metodologia, che si fonda anche sull'importanza della discussione matematica in classe (Bartolini-Bussi, 1996) nell'ottica della negoziazione dei significati (Clarke, 1997), è coerente con lo statuto epistemologico della disciplina ed è efficace per la costruzione di un apprendimento della matematica stabile e significativo (Garuti, Orlandoni & Ricci, 2008). La situazione di emergenza ha costretto molti insegnanti a limitarsi a un approccio didattico frontale, per di più a distanza, restringendo giocoforza di conseguenza l'azione di insegnamento agli ambiti più nozionistici e meccanici della matematica. La ricerca di modalità di lavoro "laboratoriale" anche a distanza, nel senso delineato dalle Indicazioni Nazionali, è stata una esigenza primaria in questi mesi e l'esperienza e i materiali che ne sono derivati possono essere preziosi anche nella prospettiva di didattica "mista".

2. I giochi matematici e la costruzione condivisa dell'apprendimento

I *giochi matematici* si sono dimostrati, nella pratica della scuola italiana, uno degli strumenti più efficaci per attivare questa dinamica di discussione e negoziazione di significato, fondamentale per il raggiungimento di un apprendimento stabile e significativo (Bolondi, 2017; Wells, 2012; Pirie & Schwarzenberger, 1988), anche in ambiente di classe virtuale e quindi in didattica a distanza. La contaminazione tra classe reale e classe virtuale pone sfide molto interessanti, ma ricche di potenzialità, sia sul piano teorico che su quello pratico (Del Zozzo & Santi, 2020), in particolare per quanto riguarda le modalità di negoziazione tra gli allievi.

3. La proposta didattica

Sulla base di queste esperienze e riflessioni, abbiamo "tradotto" per un utilizzo a distanza alcuni giochi matematici classici (ad esempio *La corsa al 20; Le piramidi dei numeri*). Possono essere giocati tra ragazzi di una stessa classe o tra ragazzi di classi diverse, e possono essere giocati in sincrono o in asincrono. Sono progettati in modo da poter essere giocati con *devices* ordinari, senza bisogno di *applets* particolari. La "digitalizzazione forzata" a cui la scuola italiana è stata costretta ha peraltro incentivato l'utilizzo di strumenti che permettono la *registrazione dei processi*. Le partite giocate restano registrate, e questo permette all'insegnante di recuperare e discutere con gli allievi i momenti in cui le operazioni di *inversione*, *proiezione* e *ricostruzione* si sono attivati. In questo modo l'attività degli allievi, anche a distanza, diventa materiale per la costruzione e la valutazione di aspetti fondamentali del percorso, in particolare quelli legati alla competenza argomentativa.

Bibliografia

Bolondi, G. (2017). Il gioco matematico, strumento per lo sviluppo della competenza argomentativa. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), Matematica, didattica e scuola: fra ricerca e prassi quotidiana. *Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la matematica" n. 31: Matematica, didattica e scuola: fra ricerca e prassi quotidiana*. (pp. 9-12) Bologna: Pitagora.

Clarke, D.J. (1997). Studying the classroom negotiation of meaning: Complementary accounts methodology. *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph, 9, 98-111.

Del Zozzo, A., & Santi, G. (2020). Theoretical perspectives for the study of the contamination between physical and virtual teaching/learning environments. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 7, 1-27.

Garuti, R., Orlandoni, R., & Ricci, R. (a cura di) (2007). Laboratorio matematico scientifico: suggerimenti ed esperienze. *Innovazione Educativa-Supplemento per l'Emilia Romagna, 3*(8). Napoli: Tecnodid.

MIUR (Ministero dell'Istruzione, Università e Ricerca) (2012). *Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione*. Roma. Disponibile da: http://hubmiur.pubblica.istruzione.it//web/istruzione/prot7734_12.

Pirie, S.E.B., & Schwarzenberger, R.L.E. (1998). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics, 19*(4), 459-470.

Wells, D. (2012). *Games and Mathematics: Subtle Connections*. Cambridge: Cambridge University Press.

Parole chiave: giochi matematici; discussione matematica; classe virtuale; laboratorio di matematica; didattica a distanza e in presenza.

Il laboratorio di matematica come metodologia verticale

Antonella Castellini[1], Chiara Giberti[2], Alice Lemmo[3] e Andrea Maffia[4]
[1]Istituto Comprensivo 1 Poggibonsi; [2]Università di Bergamo;
[3]Università dell'Aquila; [4]Università di Pavia

Da diversi anni il *laboratorio di matematica* assume un ruolo centrale come proposta metodologica nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Anche le Indicazioni Nazionali per il primo ciclo promuovono l'adozione di questa modalità (MIUR, 2012) che deve essere trasversale alle discipline e verticale nell'intero ciclo di istruzione.
Per quanto concerne la matematica, possono essere individuati dei *nuclei fondanti* che consistono in quei *contenuti-chiave* indispensabili "per la struttura stessa della disciplina, non tanto sul piano meramente didattico, quanto sul piano fondazionale, epistemologico" (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2003). In questa prospettiva, abbiamo individuato un nucleo fondante di attuale interesse nell'ambito *Dati e previsioni: leggere e interpretare i dati*.
Gli studenti hanno a disposizione strumenti tecnologici personali, utilizzano social network e ricavano informazioni dalla rete. Si tratta di una grande ricchezza, ma anche di un grande pericolo nel caso in cui queste informazioni siano interpretate da occhi non attenti (MIUR, 2018); credere a *fake news* (o anche solo essere attratti da pubblicità ingannevoli) è un rischio quotidiano.
Le difficoltà degli studenti nel leggere, confrontare e interpretare grafici, emergono quando si presentano grafici inusuali. La rappresentazione dei dati può essere fonte di difficoltà interpretative se gli alunni non sono soliti osservare con attenzione variabili come: scala del grafico, origine degli assi, intervalli ecc.
Queste difficoltà sono evidenti nel quesito D2 della prova INVALSI di grado 6 del 2012, in cui si chiede allo studente di confrontare due grafici a partire da dati rappresentati in una tabella.
La statistica può essere un importante esempio di matematica applicata alla realtà che è vicina ai nostri studenti e può essere affrontata attraverso problematizzazioni e discussioni in classe che permettono agli studenti di acquisire, oltre alle conoscenze statistiche indicate negli obiettivi delle Indicazioni Nazionali, anche importanti competenze trasversali legate allo sviluppo del pensiero critico e all'argomentazione.
Un'attività significativa da questo punto di vista consiste nello spingere gli studenti a interpretare e successivamente costruire grafici in grado di trarre in inganno, manipolando opportunamente la scala o altre variabili.

In un primo momento è necessario focalizzare l'attenzione sulla lettura e l'interpretazione di grafici. Possono essere proposti grafici che rappresentano gli stessi dati. Ciascun grafico dovrebbe essere costruito con modalità differenti (diversa tipologia di grafico, diversa scala ecc.). A partire da lavori di gruppo e discussioni condivise si possono guidare gli studenti verso una lettura critica e un'interpretazione attenta dei dati rappresentati dai grafici.
Successivamente, si possono proporre situazioni di costruzione di grafici a partire da un certo insieme di dati.
Un percorso così strutturato permette di guidare gli studenti in una riflessione legata all'interpretazione e manipolazione di rappresentazione di dati. La scelta del tipo di grafico può essere un modo per veicolare alcune informazioni e nasconderne altre: un grafico a torta in cui sono rappresentate le percentuali di risposta può nascondere l'informazione legata alla numerosità e alla significatività del campione a cui si riferiscono i dati. L'uso di una determinata scala può ad esempio portare a enfatizzare o ridurre un andamento di una serie di dati. Riportare o meno nei grafici i dati mancanti o le risposte non valide può modificare il tipo di informazione che ne ricaviamo. I dati rappresentati in un ideogramma in cui le immagini hanno le dimensioni in rapporto a qualche carattere dei dati possono essere fuorvianti per il lettore, in quanto l'area non rispetta questo rapporto lineare.

Bibliografia

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2003). "Competenze": obiettivo per chi costruisce il proprio sapere. *La matematica e la sua didattica, 17*(3), 327-338.

MIUR (2012). *Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione*. Roma. Disponibile da: http://hubmiur.pubblica.istruzione.it//web/istruzione/prot7734_12

MIUR (2018). *Indicazioni Nazionali e Nuovi Scenari*. Disponibile da http://www.indicazioninazionali.it/category/documenti-ufficiali/

UMI (2003). *MATEMATICA 200. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica: Ciclo secondario*. MIUR. Disponibile da: https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2003.pdf

Parole chiave: laboratorio di matematica; curricolo verticale; interpretazione di grafici; lettura di grafici; statistica.

Narrativa matematica: un utile supporto alla Teledidattica

Anna Cerasoli
Matematica e Scrittrice

1. Premessa

Gli oggetti di cui si occupa la Matematica sono di natura astratta. Questa caratteristica comporta la necessità di usare un linguaggio simbolico per esprimere i suoi concetti. Da ciò discende una difficoltà di comprensione che spesso genera disamore. Come operare per impedire gli inevitabili abbandoni?

L'esperienza di teledidattica, vissuta durante il distanziamento sociale da Covid, ha mostrato le maggiori difficoltà proprio nell'insegnamento della Matematica nella scuola di base, laddove sono venuti a mancare tempi e opportunità per coniugare la teoria e il calcolo con le situazioni di realtà nelle sue più diverse sfaccettature.
Nel ricordare che la parola "idea", alla base di qualsiasi ragionamento, viene dal greco "eidon" (ε-ῗδ-ον) che vuol dire "vedo", voglio sottolineare quanto sia importante una esposizione narrativa che preceda e accompagni l'introduzione di nuovi concetti. La lettura di un racconto che susciti curiosità, conquistando l'attenzione del lettore, può "emozionare", può "muovere" verso l'apprendimento di nuovi concetti che, a quel punto, diventeranno vero patrimonio del lettore.
È proprio dall'emozione suscitata dal racconto che può iniziare quell'*apprendimento a spirale,* tanto caro al pedagogista Jerome Bruner, che da un'idea intuitiva e familiare porta, attraverso processi progressivi, alla piena comprensione.

La scelta del racconto da presentare in questa occasione è stata, per così dire, obbligata: *crescita esponenziale*, espressione che abbiamo sentito innumerevoli volte durante la pandemia.
Nel capitolo dal titolo "Raddoppiando raddoppiando", tratto da "La sorpresa dei Numeri", un nonno cerca di convincere il nipotino della necessità di lavarsi. Lo fa spiegando come sia possibile che da un solo batterio, in poche ore, si formi una squadra invincibile di batteri.
Ma non basta, nel libro sono molti gli esempi in cui questo processo di accrescimento può incuriosire ed emozionare: il famoso aneddoto sull'inventore degli scacchi, il modo di forgiare le spade da parte dei samurai giapponesi, la schedina del totocalcio… addirittura la fissione nucleare.
In un altro testo di divulgazione, "Buongiorno Matematica", racconto una

ingegnosa proposta di collaborazione domestica (chi butta la spazzatura?) che certamente promette buoni guadagni. Tutti esempi concreti in cui le formule fanno sentire la loro musica.

Bibliografia

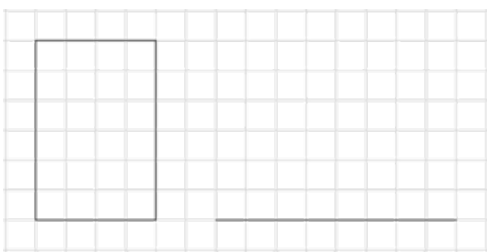
Cerasoli, A. (2013). *La sorpresa dei Numeri*. Trieste: Editoriale Scienza.
Cerasoli, A. (2018). *Buongiorno Matematica*. Milano: La Feltrinelli.

Parole chiave: crescita esponenziale; raddoppio; schedina totocalcio; esposizione narrativa; teledidattica.

Il laboratorio di matematica e le Prove Invalsi

Donatella Merlo e Elisabetta Vio
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Università di Torino

Lavorando con le Prove Invalsi si può generare una ricaduta anche sulla didattica quotidiana? Le Prove si devono prendere in considerazione solo come strumenti da utilizzare in ambito valutativo o danno degli input anche in altre direzioni?
Queste sono le domande da cui siamo partite nella consapevolezza che è sempre più urgente dare agli insegnanti degli strumenti che supportino un cambiamento reale nella didattica della matematica. È nell'attività di laboratorio, durante la quale gli allievi negoziano significati confrontandosi con i compagni, che emergono veramente i processi e si superano le difficoltà. Anche nella Dad si possono creare le condizioni per realizzare un'attività laboratoriale che preveda un buon grado di interazione fra gli allievi.
Un problema che spesso manifestano gli insegnanti nell'organizzare il laboratorio di matematica è la difficoltà di reperire problemi che mettano in moto le menti degli allievi e rendano quindi possibile il laboratorio stesso.
La ricerca dei quesiti Invalsi condotta sul sito www.gestinv.it avviene con varie modalità, tra cui quella per traguardi e obiettivi di apprendimento delle Indicazioni nazionali: definito un obiettivo quindi è facile trovare un quesito da adattare allo scopo del laboratorio. Questo è ciò che abbiamo fatto con una insegnante di classe quinta[5] che ha proposto il quesito, scelto in base al suo programma di lavoro, a piccoli gruppi di alunni collegati in videoconferenza.
Osserva la figura:



A destra del rettangolo è stato tracciato un segmento che rappresenta la base di un triangolo. Completa il triangolo in modo che la sua area sia uguale a quella del rettangolo.

[5] Valeria Perotti, scuola primaria di Agazzano (PC).

Gli alunni hanno copiato il disegno sul quaderno e hanno prodotto le soluzioni nel breve tempo stabilito (7 minuti): le hanno condivise attraverso la webcam, confrontate e discusse con la mediazione dell'insegnante. I quattro gruppi hanno dato soluzioni molto differenti, in alcuni casi ampliando e generalizzando la situazione di partenza verso casi che nemmeno l'insegnante aveva previsto: questo è stato un ottimo risultato. Dopo lo scambio avvenuto, l'insegnante ha chiesto loro di mettere per scritto le soluzioni e i ragionamenti fatti, tenendo conto di quanto emerso nella discussione online.
La metodologia seguita mette in risalto le divergenze e valorizza la creatività e le capacità intuitive e di visualizzazione dei bambini che si discostano spesso da quelle canoniche. Come insegnanti si può rimanere stupiti di queste capacità degli alunni e nello stesso tempo imparare a guardare al di là degli stereotipi didattici che spesso guidano le nostre azioni. Abbiamo assistito a "vere" discussioni, in cui tutti hanno avuto modo di esprimersi liberamente anche in una situazione che presentava oggettive difficoltà di comunicazione.
La rielaborazione di un quesito in forma laboratoriale è un modo di sfruttare la ricchezza degli stimoli provenienti dalle prove Invalsi per costruire e padroneggiare conoscenze e formare competenze di più ampia portata.
Nel laboratorio coesistono e operano sinergicamente tre livelli di azione: la comprensione del testo, la ricerca della soluzione e la formulazione di un'argomentazione. Un semplice quesito, per la modalità con cui viene proposto, può, a nostro avviso, diventare una palestra in cui esercitare tutte queste capacità. Un effetto "collaterale" è la riduzione dello spaesamento nel momento della somministrazione delle prove reali, perché si sono consolidate delle modalità di approccio a un problema valide in qualsiasi situazione.
Nel laboratorio gli alunni si trasformano in ricercatori matematici ed è questo nuovo ruolo che genera nel medio periodo un atteggiamento positivo nei confronti della matematica.

Parole chiave: laboratorio di matematica; situazione problema; argomentare; geometria; Invalsi.

Le strategie dei buoni risolutori nelle convinzioni dei maestri

Annarita Monaco
NRD Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Università di Bologna
Istituto Comprensivo "Francesca Morvillo", Roma
Università Europea di Roma

1. Premessa

Le convinzioni dei docenti sono importanti elementi predittori delle pratiche professionali e richiedono una particolare attenzione quando si vuole metter in atto un qualsiasi processo di cambiamento e di innovazione. L'insegnante affronta ripetutamente situazioni che lo costringono a prendere decisioni (Malara, & Zan, 2008). Le decisioni di un insegnante saranno influenzate dalle sue conoscenze, ma anche dalle sue convinzioni ed emozioni (Zan, 2000). Anche la modifica della pratica può intervenire e agire sul cambiamento di percezioni, convinzioni, atteggiamenti (Vannini, 2012).

2. La ricerca

In una ricerca di dottorato svolta presso l'Università La Sapienza di Roma, nell'ambito del Curriculum di Psicologia sociale, dello sviluppo e della ricerca educativa, e precisamente nella sua terza parte, sono state indagate le teorie del successo degli insegnanti sul concetto di "buon risolutore" e sulle strategie che si possono mettere in atto per attivarlo (per approfondimenti si può reperire l'intera tesi all'indirizzo: https://iris.uniroma1.it/handle/11573/1213376). Sono state effettuate interviste semi-strutturate di 60 minuti circa, a 45 insegnanti di scuola primaria di diverse regioni italiane. A ciascun insegnante è stato chiesto quali convinzioni avessero sul successo della risoluzione dei problemi, rispetto al suo significato, alle sue cause e alle strategie che si possono mettere in atto per rendere gli alunni dei buoni risolutori.

3. Alcuni risultati

Il ricercatore ha classificato, in categorie definite a posteriori, le risposte dei docenti intervistati. Sono state individuate diverse categorie, interpretative delle caratteristiche di un bambino considerato "un buon risolutore": una categoria denominata di "tratti generali", con voci lontane da comportamenti degli allievi oggettivamente riscontrabili; altre categorie, considerate più specifiche, con voci riconducibili a comportamenti più facilmente diagnosticabili, che chiamano in causa alcune competenze europee:

matematiche, linguistiche, imprenditoriali, imparare a imparare, e anche voci attinenti ad aspetti strettamente emozionali e motivazionali.
Gli stessi docenti, inoltre, hanno proposto strategie potenzialmente utili per aiutare gli allievi a diventare buoni risolutori. Tali strategie sono state acquisite, e poi classificate, di nuovo sulla base di categorie costruite a posteriori dal ricercatore. Ci sono docenti che propongono strategie definite "a maglie larghe", che appaiono molto generali, e che non si riferiscono ad atti o a interventi ben definiti e quindi osservabili degli insegnanti. Cosa vuol dire, per esempio: "Su un piano operativo, un insegnante dovrebbe stimolare la logica e il ragionamento"? "Quali comportamenti dei docenti possono essere indicatori di ciò?" Sono state acquisite, poi, le dichiarazioni di altri docenti che sembrano voler negare completamente le loro possibilità di intervento: "Da una parte ci sono le conoscenze che gli diamo noi, da una parte le capacità che ha lui. Sono sue proprie" e ancora: "Per alcuni bambini non c'è niente da fare".
Di contro, ci sono docenti che propongono strategie mirate, definite dal ricercatore "a maglie strette", che ipotizzano comportamenti più circostanziati, come ad esempio: "Un insegnante dovrebbe dare meno regole possibili" oppure "(…) può proporre giochi matematici". Tali strategie sono state classificate in base agli aspetti che mettevano in gioco di volta in volta: strategie a maglie strette, relative ai *processi, ai prodotti, ai tipi di problemi, alle metodologie, al contesto, all'organizzazione del lavoro*. Ci sono docenti, infine, che hanno messo l'accento sugli aspetti motivazionali e affettivi che, a loro avviso, possono incoraggiare e sostenere i bambini nel corso della loro risoluzione.

4. Riflessioni conclusive

Da questa ricerca emergono le convinzioni che gli insegnanti hanno sul successo dei risolutori di problemi matematici e sul significato delle strategie didattiche dei docenti. In futuro potranno essere effettuate ricerche su campioni più numerosi, utilizzando le categorie emerse in questa ricerca esplorativa. Sarebbe anche opportuno mettere a punto modelli formativi delle professionalità dei docenti, più efficaci nello scardinare alcune convinzioni resistenti al cambiamento, grazie ad auspicabili processi di autoriflessività.

Bibliografia

Malara, N., & Zan, R. (2008). The complex interplay between theory in mathematics education and teacher's practice: Reflections and examples. In L.D. English (Ed.), *Handbook of International Resarch in Mathematics Education* (II ed., pp. 535-560). London: Routledge, Taylor & Francis.

Vannini, I. (2012). *Come cambia la cultura degli insegnanti. Metodi per la ricerca empirica in educazione*. Milano: Franco Angeli.

Zan, R. (2000). L'insegnante come solutore di problemi. *La matematica e la sua didattica, 14*(1), 48-71.

Parole chiave: risoluzione di problemi; convinzioni; strategie; formazione docenti; autoriflessività.

Calcolo mentale: smontare e rimontare i numeri per lo sviluppo di strategie efficaci

Elisabetta Robotti[1], Antonella Censi[2] e Laura Peraillon[3]
[1]Università di Genova; [2]Scuola primaria Quart-Villair
[3]Scuola primaria Fénis

1. Introduzione

Obiettivo della nostra ricerca è mostrare come potenziare il calcolo mentale dalla scuola dell'infanzia. In questo seminario, quindi, discuteremo i risultati del confronto fra quattro gruppi diversi di alunni tutti frequentanti la 1ª classe della scuola primaria cui è stato chiesto di eseguire semplici operazioni (tratte da AC-MT) e di esplicitarne le strategie di calcolo: alunni che hanno seguito sin dalla scuola dell'infanzia le attività proposte nell'ambito della nostra ricerca (G1), alunni che hanno seguito le attività solo nella scuola dell'infanzia (G2), alunni che le hanno seguite solo nella scuola primaria (G3) e alunni che non hanno mai seguito le attività proposte dalla nostra ricerca (G4, di controllo). Sono stati coinvolti 97 alunni di cui 28 di G1, 27 di G2, 23 di G3 e 19 di G4. A gennaio della prima, gli alunni sono stati sottoposti a un pre-test tratto dalle prove AC-MT e composto dalle operazioni: 1 + 2, 3 + 4, 2 + 6, 3 – 1, 8 – 5, 7 – 3. Sono stati intervistati singolarmente e videoregistrati, chiedendo loro di risolvere l'operazione fornita dall'insegnante intervistatrice e di esplicitarne verbalmente la strategia usata. L'analisi dei dati forniti ha prodotto una caratterizzazione delle strategie di calcolo messe in atto dai bambini sulla base della quale si sono definiti i profili degli alunni. È stato quindi predisposto un percorso didattico di potenziamento volto essenzialmente al miglioramento delle strategie di calcolo. A fine maggio, gli alunni sono stati sottoposti a un post-test, con le stesse modalità del pre-test, composto dalle seguenti operazioni: 4 + 5, 10 + 3, 8 + 1, 9 – 3, 12 – 4, 8 – 5. Di seguito, alcune considerazioni sull'analisi e il confronto degli esiti delle operazioni di addizione delle due prove.

2. Perché smontare e rimontare i numeri: analisi dei risultati

La caratterizzazione delle strategie di calcolo messe in atto dai bambini discrimina innanzitutto la scelta dell'uso delle dita dalla scelta del calcolo mentale. In particolare, sono state identificate cinque strategie di addizione con le dita (da quella più naïve come "Alza il primo addendo su una mano, il secondo sull'altra mano, poi riconta tutto" a "Fissa un addendo sulle mani, prosegue contando in avanti") e sette strategie di addizione con il calcolo mentale (per esempio, "Smonta e rimonta i numeri", "Ricorso a fatti aritmetici", "Usa numeri gemelli e sottrae 1"). Focalizzando poi l'attenzione sulla correttezza, osserviamo che nelle addizioni il gruppo di controllo ha risposto in modo corretto anche se con tasso inferiore rispetto agli altri gruppi sia nel pre che post-test. Mettendo in relazione questo risultato con le strategie di risoluzione osserviamo che la maggioranza degli alunni del G4 utilizza la strategia del "contare in avanti", tenendo traccia degli addendi tramite le dita. L'uso delle dita, in G4, è mantenuto nel tempo come strumento risolutivo e questo fa pensare che l'intervento didattico da gennaio a maggio non abbia favorito l'evoluzione nelle strategie di calcolo. Tale strategia è qui efficace, in termini di correttezza, perché applicata a valori numerici piccoli che consentono di procedere con un'enumerazione in avanti. È facile immaginare come, considerando valori numeri più grandi, il conteggio in avanti non sia assimilabile al calcolo mentale. Di qui, l'importanza di potenziare strategie fondate sulla relazione parte/tutto (Mulligan, & Mitchelmore, 2013). Gli altri gruppi, infatti, si concentrano sui fatti aritmetici e sulla scomposizione degli addendi. Per loro l'efficacia, in termini di correttezza, viene mantenuta anche con calcoli più complessi (come in quelli del post-test e nella sottrazione) e si evidenzia un'evoluzione delle strategie usate. Ben lungi dal demonizzare l'uso delle dita per lo sviluppo delle strategie di calcolo, la ricerca mostra come l'uso delle dita sia importante per lo sviluppo di efficaci strategie di calcolo mentale (relazione parte/tutto nel completamento a 10) ma altrettanto se usato semplicemente per tenere traccia dell'enumerazione in avanti (o indietro) con valori numerici grandi. In questo senso, vediamo un'evoluzione delle strategie di calcolo, nel passaggio dall'uso delle dita come strumento di calcolo all'uso del modello mentale delle dita per il calcolo mentale (*gnosia digitale*, Noël, 2005). Abbiamo quindi visto che il potenziamento del calcolo mentale con attività che si basano sulla relazione parte/tutto e che consentono di visualizzare, gestire mentalmente la scomposizione del numero e percepire le regolarità delle strutture (Resnik, Bill, Lesgold, & Leer, 1991) è auspicabile già alla scuola dell'infanzia perché l'efficacia permane a lungo termine.

Bibliografia

Mulligan, J.T., & Mitchelmore, M.C. (2013). Early awareness of mathematical pattern and structure. In L. English & J. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 29-46). Dordrecht: Springer Science-Business Media.

Noël, M.P. (2005). Finger gnosia: a predictor of numerical abilities in children? *Child Neuropsychology*, 11, 1-18.

Resnick, L.B., Bill, V.L., Lesgold, S.B., & Leer, N.M. (1991). Thinking in arithmetic class. In B. Means, C. Chelemer & M.S. Knapp (Eds.), *Teaching advanced skills to at-risk students* (pp. 27-53). Menlo Park, CA: SRI international.

Parole chiave: calcolo mentale; dita; senso del numero; senso dello spazio; comporre e scomporre numeri.

Perché la matematica non sia un dramma: viaggio tra giochi, enigmi e curiosità per rendere la matematica più attraente

Bruno Spechenhauser
Istituto d'Istruzione Superiore "Alberti", Bormio, Sondrio

1. Luoghi comuni e responsabilità dei docenti di matematica

Diventare ed essere insegnanti in generale non è mai facile. Se poi la disciplina d'insegnamento è la matematica le difficoltà si moltiplicano. Molto spesso si sottolinea che lo studio della matematica consente di sviluppare capacità logiche, di analisi, di giudizio e comprensione del testo. La scuola non serve solo a insegnare qualcosa "che serve" e a trovare lavoro, ma soprattutto a essere dei cittadini in grado di ragionare. Se non si continua con studi umanistici probabilmente anche la letteratura non servirà a nulla, ma questo non significa che non sia formativa e che non vada imparata. Ma gli studenti, in generale, ribattono che la letteratura è cultura, cioè la letteratura, la storia e altre discipline umanistiche sono riconosciute importanti da tutti in quanto cultura. La matematica, invece, non è ritenuta tale! Molti ritengono che si tratti di un problema culturale prettamente italiano poiché la nostra nazione vanta un'importante tradizione umanistica, ma probabilmente non è questa la causa della scarsa considerazione delle scienze, in particolare della matematica. I fattori che hanno portato a ciò sono diversi, e molto più gravi di quel che solitamente si pensano. In particolare, è necessario evidenziare la problematica di docenti che insegnano matematica ma che hanno una scarsa conoscenza della stessa. La conoscenza della disciplina non garantisce che un insegnante sia bravo, ma è ovviamente un prerequisito fondamentale. Matematicamente si potrebbe affermare che è una condizione necessaria, anche se non sufficiente: non basta conoscere la disciplina, ma sicuramente se non la si conosce non si può essere bravi docenti. E chi non conosce la propria disciplina non solo insegnerà contenuti errati, ma non sarà assolutamente in grado di insegnare COME studiare la matematica, stimolando a chiedersi sempre il perché, a ragionare, non a vedere la matematica come un inutile mucchio di formule da imparare a memoria. Non ha senso imparare mnemonicamente procedure o formule che costituiscono per molti docenti l'antidoto alle difficoltà. È preferibile proporre problemi non-standard, stimolando la curiosità attraverso la ricerca di soluzioni non precedentemente definite. Una possibile soluzione al problema è la promozione di attività ludiche come punti di partenza per migliorare le abilità di ragionamento e di intuizione.

2. Curiosità matematiche

Una serie di curiosità matematiche può derivare dalla trattazione del cosiddetto triangolo di Tartaglia. Le curiosità derivano da numerose proprietà del triangolo che vanno ben oltre l'uso consueto dello stesso triangolo come determinazione dei coefficienti nello sviluppo della potenza di un binomio. In particolare, nell'opera "Le Triangle Aritmétique", Pascal lo utilizza come punto di riferimento di una nuova parte della ricerca matematica, il calcolo combinatorio. Altre curiosità, poco illustrate nella didattica tradizionale, sono le seguenti:

- sommando i numeri di ogni riga si ottiene la successione delle potenze di 2;
- sommando i numeri su ogni diagonale che va dal basso a sinistra verso l'alto a destra, si ottengono soltanto numeri appartenenti alla successione di Fibonacci;
- ogni termine del triangolo è uguale alla somma di tutti i termini che lo precedono, nella colonna alla sua sinistra;
- la prima colonna del triangolo di Tartaglia è composta dalla successione dei numeri naturali *n*, la seconda dai numeri triangolari, la terza dai numeri tetraedrici, la quarta dai numeri ipertetraedrici, cioè del tetraedro in quattro dimensioni e così via;
- nelle potenze di 1001^n, come nelle potenze di 10001^n,100001^n, … ritornano i numeri del triangolo, separati dagli zeri.

3. Il gioco come elemento motivazionale allo studio della matematica

Il gioco e l'approccio ludico alla matematica, considerata spesso materia arida e noiosa, costituisce un forte elemento motivazionale da promuovere per il superamento della didattica esclusivamente trasmissiva (Peiretti, 2012; Peres, 2017; Guerraggio, 2020; Peres, 2020). Ciò permette di rendere consapevole il discente di come, nella risoluzione di un problema matematico, lo svolgimento dei calcoli costituisce SOLO il momento terminale. La risoluzione di un problema richiede la capacità di impostare il ragionamento più appropriato che passa attraverso un'analisi approfondita del testo, con lo scopo di cogliere come è possibile conseguire il risultato desiderato utilizzando convenientemente i dati a disposizione.

Bibliografia

Guerraggio, A. (2020). Speciale giochi matematici. *Prisma*, 17, 9097.
Peiretti, F. (2012). *Matematica per gioco*. Milano: Longanesi & C.
Peres, E. (2017). *Matematica per comuni mortali*. Milano: Salani.
Peres, E. (2020). Magici quadrati magici. *Prisma*, 19, 9091.

Parole chiave: competenze matematiche; docenti; motivazione; triangolo di Tartaglia; giochi matematici.

"Problemi al centro": un progetto per la scuola primaria

Rosetta Zan
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

1. L'atteggiamento verso la matematica e i problemi

Il rapporto di molti allievi con la matematica si deteriora nel corso dell'esperienza scolastica: se all'inizio della scuola primaria questa disciplina è fra le più apprezzate, con il passare del tempo diventa la più temuta e (quindi) odiata, e questi sentimenti spesso portano nel tempo a un vero e proprio atteggiamento di rifiuto.

I primi cambiamenti importanti avvengono già alla scuola primaria: se in prima la matematica viene associata per lo più all'esperienza di contare, e quindi a competenze percepite dai bambini come potenti e utili, già in seconda le cose cominciano a cambiare. La ricerca e le testimonianze degli allievi evidenziano il ruolo che hanno in questo deterioramento del rapporto con la matematica argomenti e richieste sempre più complessi di cui i bambini non colgono il senso, e che sono oggetto di una valutazione in genere interpretata come una valutazione su di sé invece che sulla prestazione.

L'attività con i problemi ha un ruolo cruciale nella costruzione di questo atteggiamento negativo verso la matematica, per diversi motivi: è pervasiva, in quanto è trasversale rispetto agli argomenti; i problemi proposti sono in genere artificiosi, distanti dalla realtà, e quindi i bambini in genere non ne colgono il senso; è oggetto di valutazione, e quindi è un'attività che prevede limiti di tempo, che dev'essere svolta individualmente, in cui l'errore ha conseguenze negative.

Da queste considerazioni nasce il progetto "Problemi al centro", promosso da Giunti con la direzione scientifica di Pietro Di Martino e di chi scrive, con l'intento di promuovere un atteggiamento positivo e sereno verso la matematica, e al tempo stesso di sviluppare competenze matematiche trasversali, com'è quella di problem solving, e specifiche (Di Martino & Zan, 2019, 2020). Agli insegnanti che hanno aderito al progetto (circa 9000) è stato consegnato un kit contenente un fascicolo che sintetizza le motivazioni teoriche che ne stanno alla base e che suggerisce anche alcuni strumenti per il monitoraggio dell'atteggiamento verso la matematica che hanno costruito o stanno costruendo gli allievi. Al fascicolo sono allegati dieci problemi per ognuno dei tre livelli individuati (prima, seconda e terza, quarta e quinta).

In un progetto che mette al centro il problem solving, la metodologia da adottare e la scelta dei problemi hanno un ruolo importante.

2. La metodología

L'efficacia dell'attività con un problema dipende da come l'insegnante la gestisce. Nel nostro progetto:

- l'attività si svolge *in classe*, e non è oggetto di valutazione sommativa;
- si favorisce il *lavoro collaborativo* e una didattica di tipo laboratoriale;
- si lascia il *tempo* necessario;
- per quanto riguarda la *gestione dell'attività* si prevedono in genere tre fasi: lettura e comprensione del problema, tentativi di risoluzione, discussione collettiva e confronto.

3. La scelta dei problemi

I problemi proposti in questo progetto sono stati selezionati o costruiti in base ai seguenti criteri:
(1) *Complessità adeguata* alla classe: il problema mette l'allievo di fronte a una situazione nuova, impegnativa (cioè deve effettivamente costituire un problema), ma al tempo stesso è affrontabile (non necessariamente risolto) con gli strumenti che l'allievo ha a disposizione. (2) S*ignificatività*: il problema mette in gioco contenuti matematici significativi; permette di lavorare su processi matematici significativi (quali: comprendere, esplorare, rappresentare, congetturare, argomentare, attivare processi di controllo, comunicare); favorisce lo sviluppo di una visione adeguata della matematica e di un buon senso di autoefficacia. (3) *Inclusività*: il problema permette l'esplorazione e approcci risolutivi diversi, stimola idee e processi significativi anche se non si concludono con la soluzione. (4) *Comprensibilità* (relativamente alla conoscenza del mondo che ha l'allievo). Questa caratteristica del problema rimanda alla sua *autenticità*, che a sua volta si può articolare in più condizioni (per approfondimenti si veda Zan, 2016): la situazione descritta (il *contesto*) e le informazioni date non sono artificiose; il modo in cui sono date le informazioni non è artificioso; la domanda non è artificiosa.
Nel corso del seminario verranno presentati e analizzati alcuni problemi creati per il progetto, insieme ad alcune esperienze restituite dagli insegnanti che hanno partecipato.

Bibliografia

Di Martino, P., & Zan, R. (2019). *Problemi al centro. Matematica senza paura*. Firenze: Giunti.

Di Martino P., & Zan, R. (2020). *Problemi per crescere*. Firenze: Giunti.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo.* Roma: Carocci.

Parole chiave: scuola primaria; problemi; problem solving; efficacia; criteri di scelta dei problemi.

SEMINARI PER LA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO E SECONDO GRADO

Emozioni e apprendimento: nuove prospettive per l'insegnante di matematica

Chiara Andrà[1] e Peter Liljedahl[2]
[1]*Università del Piemonte Orientale*
[2]*Simon Fraser University, Canada*

Le emozioni sono state considerate, in didattica della matematica, come una sorta di prodotto di scarto nel processo di apprendimento (Hannula, 2011; Zan, Evans, & Hannula, 2006): per esempio, l'ansia per l'esame di matematica è stata considerata alla stregua di un effetto sgradevole, da evitare. Tradizionalmente, le ricerche in didattica della matematica sul rapporto tra emozioni e apprendimento hanno ricevuto un'attenzione minore, se confrontate per numero e qualità con quelle relative a costrutti di tipo affettivo come le credenze o le attitudini (Hannula, 2011). Recentemente, grazie ai contributi di ricercatori come Radford (2015), esse hanno assunto un ruolo meno marginale e numerosi studi dimostrano che esse contribuiscono a dare forma sia all'apprendimento, sia all'insegnamento, rappresentando un sistema innato di feedback (Liljedahl, 2014, 2018). Vediamo un esempio, in cui si analizzano le emozioni di tre studenti coinvolti nello svolgimento di un compito.
Nel gioco del Lotto, una cinquina è una combinazione senza ripetizione di 5 numeri da 1 a 90. Carlo, Elisa e Giulia sono studenti di classe terza secondaria di II grado, che devono calcolare quante cinquine possano essere estratte su una ruota e che conoscono le formule della combinatoria. Elisa legge ad alta voce il testo del compito. Ha un'espressione facciale scettica e il tono della sua voce sembra rivelare che sia un po' annoiata. Giulia, che al contrario sembra interessata e partecipe, fissa il suo sguardo su Elisa e invita i suoi compagni di classe a usare lo schema fornito dall'insegnante. Carlo ed Elisa, che sono più sicuri di sé come possiamo dedurre dalla loro postura, seguono Giulia e volgono lo sguardo allo schema, quindi Giulia lo legge: "L'ordine è importante?". Sia Carlo che Elisa rispondono "sì", con sicurezza, guardandola, ma Giulia continua a guardare lo schema e ne dubita, corrugando la fronte: "Perché è importante?". Lancia rapidamente uno sguardo a Carlo ed Elisa, poi chiude gli occhi. Carlo risponde: "La prima estrazione è questa, la seconda estrazione è questa…". Carlo è in errore, ma per alcuni minuti il gruppo di studenti segue questa sua intuizione errata, guidato dalla sicurezza che egli trasmette parlando. Tuttavia, le emozioni di Giulia portano la studentessa sulla buona strada, perché anche se a livello cognitivo Giulia non sa controbattere a Carlo, a livello emotivo ha la sensazione che la sua affermazione sia errata. Dopo qualche interazione, gli studenti arrivano alla conclusione:

"disposizione". Nelle disposizioni, "lo stesso elemento può essere ripetuto", recita Giulia, ma nel Lotto i numeri non si ripetono. Gli studenti sembrano arrivati a un vicolo cieco. Carlo è silenzioso e dubbioso. Si arriccia i capelli con un'espressione perplessa sul viso. Giulia ragiona ad alta voce: "il numero di tutte le possibili cinquine è 90 alla quinta". Carlo è ancora in dubbio, non ha cambiato la sua postura e la sua espressione facciale, e ripete "90 alla potenza di 5. No, aspetta… Si ripete?". Dopo una pausa di silenzio, Carlo continua: "Ad esempio, qui [su una ruota] c'è 68, può esserci un altro 68 qui [sulla stessa ruota]?". Carlo torna allo schema e chiede: "L'ordine è importante?". Giulia, la cui idea iniziale era che non lo fosse, guarda intensamente Carlo, come se si aspettasse che cambi idea. Seguendo Radford (2015), notiamo che le emozioni di Carlo, Elisa e Giulia sono radicate sia nei processi fisiologici sia nei pensieri che accompagnano lo svolgimento del compito: attraverso le emozioni, i tre studenti percepiscono, comprendono, riflettono e agiscono. In altre parole, non è perché Carlo, o Giulia, sono diventati emotivi che non riescono a pensare e calcolare in modo appropriato. Al contrario, emozioni positive e negative, alternandosi, forniscono allo studente un metro per 'sentire' la vicinanza, o la lontananza, alla soluzione (corretta) del problema.

Bibliografia

Hannula, M. (2011). The structure and dynamics of affect in mathematical thinking and learning. In: M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the seventh congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 34-60). Rzeszów, PL: Erme.

Liljedahl, P. (2014). Emotions as Orienting Experiences. In: L. Sumpter (Ed.), *Proceedings of the 20th International Conference on Mathematical Views (MAVI)*. Falun, SE: Ogskolan Dalarna.

Liljedahl, P. (2018). Affect as a system: the case of Sara. In: B. Rott et al. (Eds.), *Views and beliefs in Mathematics Education*. Switzerland AG: Springer Nature Education.

Radford, L. (2015). Of love, frustration, and mathematics: A Cultural-historical approach to emotions in mathematics teaching and learning. In: B. Pepin, & B. Rösken-Winter (Eds.), *From beliefs and affect to dynamic systems: (exploring) a mosaic of relationships and interactions* (pp. 25-49). NY: Springer.

Zan, R., Brown, L., Evans, J. & Hannula, M. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics, Special Issue, 63*(2), 113-121.

Parole chiave: emozioni; intuizione; approccio costruttivista; ricerca in ambito affettivo; activity theory.

Liceo matematico: un percorso transdisciplinare per interpretare la realtà

Giovanna Bimonte[1], Francesco Saverio Tortoriello[2] e Ilaria Veronesi[3]
[1]*Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche, Università di Salerno*
[2,3]*Dipartimento di Matematica, Università di Salerno*

Nell'ambito del percorso del Liceo Matematico è stata progettata un'attività laboratoriale dedicata agli studenti dell'ultimo anno, mirata a fornire modelli matematici ed economici che consentono di analizzare e comprendere le dinamiche delle decisioni in vari contesti. Finalità dell'attività è la costruzione di una visione unitaria di problemi storico-politico-economici reali in una visione transdisciplinare che prescinde dalla tradizionale frammentazione propria dell'ambito scolastico (Capone, Rogora, & Tortoriello, 2017).
Le attività del percorso sono state sviluppate con un approccio costruttivista (Harel & Papert, 1991), dove gli artefatti tecnologici hanno svolto il ruolo di strumenti (Rabardel, 2002). Si è scelto di sviluppare la metodologia del *role playing* simulato: gli studenti sono stati divisi in piccoli gruppi e hanno avuto il ruolo di feudatari nel Medioevo con il compito di interagire strategicamente e far prosperare le loro terre confrontandosi con le sfide, le difficoltà e le esigenze degli altri giocatori. Sono stati presentati agli studenti alcuni esempi classici come *Il dilemma del prigioniero*, *La città lineare di Hotelling*, *Il Tic-Tac-Toe*, da discutere in gruppo per proporre possibili soluzioni giustificando le scelte. Questo approccio incentrato sullo studente, in una dinamica di apprendimento basato sull'interazione strategica, ha favorito la partecipazione attiva perché ha stimolato l'intelligenza emotiva (Goleman, 1995).
Dopo un approccio alle tematiche in modalità di *cooperative learning*, il percorso risolutivo è stato poi sviluppato in modo rigoroso e formale. Sono stati presentati i problemi di ottimo, locali e globali, mostrando così agli studenti quanto la matematica permea la vita quotidiana, soprattutto quando ci si riferisce a problemi economici, problemi di scelta, problemi che richiedono di massimizzare o minimizzare l'impatto di una decisione che deve rispondere a un problema reale, tenendo conto di numerose variabili e condizioni, con la consapevolezza che, secondo la teoria classica della Teoria delle Decisioni, nell'analisi economica un agente, per la sua razionalità, deciderà di scegliere un'azione che ha la più alta utilità soggettiva (Raiffa, 1968). Si è discusso, inoltre, dell'analisi decisionale che si concentra sulla ricerca di strumenti, metodologie e software per aiutare gli agenti a prendere decisioni migliori e dei recenti sviluppi della matematica che forniscono il potenziale per profondi cambiamenti, altamente benefici nell'educazione matematica a tutti i livelli. La Teoria dei Giochi acquista quindi un valore significativo dal punto di vista

educativo e didattico in qualità di mediatore semiotico (Vigotsky 1987) sia in chiave positiva, in quanto fornisce informazioni per comprendere certe scelte, strategie e tattiche in situazioni di conflitto, sia in chiave prescrittiva per determinare quando un equilibrio può verificarsi e quando no, nell'interazione tra due o più soggetti. I contenuti teorici sono poi stati sviluppati in attività di laboratorio, in un problema di posizionamento ottimo di una nuova attività in uno spazio chiuso, in cui erano già stati posizionati alcuni servizi. L'agente, nel decidere dove posizionare un nuovo servizio, deve ottimizzare i propri guadagni sapendo che gli utenti sono distribuiti uniformemente su tutto lo spazio e che la scelta ottima dipende unicamente dalla distanza.
Il problema di posizionamento ottimo nel piano, tradizionalmente risolto per via analitica solo nei percorsi universitari, nell'approccio geometrico delle nostre attività è diventato un problema di massimo risolubile topologicamente già al termine del primo biennio di scuola superiore: elementi e proprietà della geometria euclidea e processi risolutivi della geometria analitica del piano, permettono di calcolare topologicamente, grazie alla tassellazione di Voronoi, la soluzione ottima al problema di posizionamento che coincide con l'equilibrio di Nash. Grazie ad artefatti tecnologici e a software di geometria dinamica sono state sviluppate simulazioni del caso di studio.
A causa dell'interruzione delle attività didattiche per il COVID-19, i laboratori si sono svolti in piattaforma e-learning con didattica a distanza, in *role-playing* simulato e con i software utilizzati da remoto dagli studenti che hanno mostrato grande interesse sia sui contenuti tematici che sugli aspetti etici.

Bibliografia

Capone, R., Rogora, E., & Tortoriello, F.S. (2017). La matematica come collante culturale nell'insegnamento. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, 2*(3), 293-304.

Goleman, D. (1995). *Emotional Intelligence: Why It Can Matter More than IQ.* London, UK: Bloomsbury Publishing.

Harel, I.E., & Papert, S.E. (1991). *Constructionism.* Norwood, NJ: Ablex Publishig.

Mallozzi, L., D'Amato, E., & Pardalos, P.M. (Eds.) (2017). *Spatial Interaction Models*, Berlin: Springer International.

Okabe, A., & Suzuki, A. (1997). *Locational optimization problems solved through Voronoi diagrams*. *European Journal of Operational Research, 98*(3), 445-456.

Plastria, F. (2001). Static competitive facility location: an overview of optimisation approaches. *European Journal of Operational Research, 129*(3), 461-470.

Rabardel, P. (2002). *People and Technology. A Cognitive Approach to Contemporary Instruments*. Disponibile da: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01020705

Vigotsky, L. (1987). *Mind in society: The development of higher psycological processes.* Harvard: Harvard University Press.

Parole chiave: Liceo Matematico; transdisciplinarietà; role playing; Game theory; Voronoi.

Calcolo combinatorio: strade interrotte, deviazioni, scorciatoie e indicazioni nella risoluzione di problemi

Laura Branchetti[1], Luca Lamanna[2], Carmen Batanero[3] e Maria Magdalena Gea Serrano[4]
[1,2]Università degli Studi di Parma
[3,4]Universidad de Granada, Spagna

1. Introduzione

Lo studio della combinatoria in matematica gioca un ruolo importante, in particolar modo per il ruolo chiave che riveste all'interno della matematica discreta. Nonostante ciò, all'insegnamento di questo argomento non viene tradizionalmente dedicata molta attenzione. Kapur (1970), tra le tesi a sostegno dell'insegnamento della combinatoria, sottolinea come questa possa essere proposta a diversi livelli scolastici e usata per allenare capacità enumerative degli studenti e stimolarne l'attività di formulazione delle congetture e generalizzazione di risultati; ragioni che, dal nostro punto di vista, giustificano un interesse verso il miglioramento della qualità di insegnamento di questo argomento.

2. Studi precedenti

A partire dai risultati di Piaget e Inhelder (1955), Fischbein e Gazit (1988) studiano gli effetti dell'istruzione sulla capacità combinatoria degli adolescenti, concludendo che la capacità di risolvere problemi non raggiunge spontaneamente uno sviluppo e, dunque, gli studenti devono necessariamente ricevere un'istruzione. Nel loro studio, inoltre, Fishbein e Gazit (1988) iniziano un'analisi delle difficoltà degli studenti nel calcolo combinatorio andando a considerare alcune variabili (chiamate variabili combinatorie), successivamente descritte in modo più ampio e studiate in modo più approfondito in Navarro-Pelayo (1994) e Batanero, Godino, & Navarro-Pelayo (1997), in particolar modo per quel che riguarda l'effetto di tali variabili sulla difficoltà relativa dei problemi elementari di calcolo combinatorio.

3. Strategie risolutive

Lo scopo del nostro lavoro di ricerca è stato quello di analizzare le scelte strategiche di studenti di scuola secondaria di secondo grado, con e senza istruzione nell'ambito della combinatoria, durante la risoluzione dei problemi di calcolo combinatorio. In particolare, ci siamo focalizzati sull'effetto delle variabili combinatorie sulle scelte di strategia degli studenti. Un questionario composto da 13 problemi è stato elaborato e proposto a un campione di 115 studenti (51 dei quali con istruzione). Al termine dello studio, sono state individuate delle strategie principali, ritrovandone molte già precedentemente identificate e descritte in Roa (2000) nel corso di una ricerca condotta su studenti universitari (tra queste, ad esempio, troviamo l'uso di una formula o l'enumerazione completa di tutte le configurazioni).

L'analisi delle frequenze delle strategie non ha evidenziato particolari pattern di utilizzo riconducibili alle variabili considerate ed è emerso come le strategie adottate tendano a essere molto diversificate tra i due gruppi di studenti e, all'interno dello stesso gruppo, tra studenti appartenenti a diversi gruppi classe. Si è inoltre osservato come da una parte gli studenti che non hanno ricevuto istruzione procedano nella maggior parte dei casi tramite enumerazione delle configurazioni, mentre dall'altra gli studenti che hanno ricevuto istruzione tendono a spaziare maggiormente tra le strategie adottate.

Queste osservazioni portano a ipotizzare che la strategia didattica del singolo insegnante abbia un'influenza significativa sulle scelte degli studenti. Tale variabile però non è stata ancora indagata in modo sistematico e rimane aperto il seguente problema didattico: quali scelte dell'insegnante potenziano le numerose intuizioni e strategie spontanee degli studenti e quali invece bloccano le loro intuizioni portandoli a scegliere strategie che non padroneggiano a fondo e li portano fuori strada? In questo contributo verranno presentate le principali strategie degli studenti e verranno formulate alcune ipotesi, da verificare sul campo in futuro, relative all'influenza di alcune variabili didattiche sullo sviluppo di competenza in ambito combinatorio da parte degli studenti di scuola secondaria.

Bibliografia

Batanero, C., Godino, J.D., & Navarro-Pelayo, V. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32*(2), 181-199.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5*(1), 193-198.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Barcelona: Paidós.

Kapur, J.N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education, 3*(1), 111-127.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesi PhD, Universidad de Granada.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Tesi PhD, Universidad de Granada.

Parole chiave: calcolo combinatorio; strategie risolutive; variabili combinatorie; enumerazioni; scuola secondaria.

L’incoerenza delle scelte di *numero* nei libri di testo di geometria

Michele Canducci
Dipartimento Formazione e apprendimento, SUPSI di Locarno, Svizzera

L’intervento rientra nell’ambito di un dottorato di ricerca interno al progetto *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola tra lingua comune e linguaggio specialistico* (progetto 176339 del Fondo Nazionale Svizzero per la Ricerca Scientifica). Tra le finalità del progetto vi è l’analisi, dal punto di vista linguistico e matematico, della trattazione di parti di testi scolastici di geometria di scuola primaria e secondaria di primo grado italiani.
Nell’insieme, i libri di testo sono dispositivi rigidi dal punto di vista dell’interazione comunicativa. Effettivamente, a differenza dei contesti colloquiali, nei registri scritti il processo di negoziazione di significiato fra gli interlocutori è praticamente assente, perché:

> un testo scritto può essere letto anche da persone che non conoscono l’autore o dal quale non sono conosciute, o comunque molto lontane dal punto di vista dello spazio, del tempo e della cultura; il lettore deve quindi ricostruire il significato sulle sole basi del testo e della propria cultura. (Ferrari, 2004, p. 61)

Per tale ragione è necessario che le informazioni contenute e le scelte effettuate dall’insieme dei *costruttori di significato* di un manuale (Bezemer & Kress, 2010) siano chiare e corrette. Ma devono essere anche coerenti, al fine di veicolare nel migliore dei modi il sapere che si vuole fare apprendere e non indurre il lettore a possibili ostacoli, ad esempio nell’operare conversioni semiotiche fra elementi espressi in due registri di rappresentazione diversi (Canducci, 2019). In questo seminario, si sfrutterà il concetto di “coerenza testuale” per analizzare e discutere testi scritti di matematica destinati all’uso didattico:

> un testo è coerente quando, sulla base di operazioni di decodifica linguistica e di inferenza contestuale, è possibile ricondurre il suo contenuto a una particolare architettura semantica, vale a dire a un insieme di unità di diverso livello gerarchico collegate all’interno di più piani semantici. […] Da un punto di vista sia locale che globale, tale architettura deve essere in sintonia da una parte con il mondo rappresentato e dall’altra con l’obiettivo comunicativo che è dato via via di riconoscere. (Ferrari, 2014, p. 118)

Verrà dunque esaminata la coerenza di porzioni di testi scolastici nei quali l'architettura semantica dovrebbe essere, sia localmente sia globalmente, in sintonia con l'obiettivo comunicativo del manuale di matematica e, in particolare, con i concetti geometrici di cui ci si occupa nella porzione stessa.
In questa prospettiva si prenderà in considerazione uno specifico elemento come possibile indicatore di coerenza (o incoerenza): le modalità con cui la categoria grammaticale di *numero* si presenta in porzioni di manuali scolastici di matematica di scuola secondaria di I grado nelle quali si definiscono gli elementi dei poligoni. Tale concetto verrà poi trasferito in testi di scuola secondaria di II grado.
Per quanto riguarda i manuali di scuola secondaria di I grado, nelle parti introduttive dell'argomento "poligoni", vengono solitamente definiti gli elementi vertici, lati, angoli, diagonali ecc.; in una stessa porzione di testo accade che le definizioni di alcuni enti vengano date al singolare, mentre altre al plurale, pur trattandosi in ogni caso di enti con una numerosità maggiore di uno. Ad esempio, si scrive *I segmenti della linea spezzata chiusa sono i lati del poligono* e subito dopo *Il punto in cui si incontrano due lati si chiama vertice*. Tali scelte si presentano non solo nel registro linguistico, ma anche in quello figurale, inevitabilmente presente nei libri di testo di geometria.
L'analisi proposta in questo seminario mette in evidenza le diffuse incoerenze nell'uso del plurale/singolare nel trattare enti geometrici in libri di scuola secondaria di primo e secondo grado; incoerenze che possono incidere sulla concettualizzazione degli elementi geometrici in gioco. Verranno inoltre mostrati alcuni esempi significativi di relazione fra le scelte effettuate nelle definizioni linguistiche e le corrispondenti rappresentazioni figurali degli enti considerati, al fine di mettere in luce come incoerenze derivanti dalla disomogeneità del testo possano avere ripercussioni dal punto di vista didattico.

Bibliografia

Bezemer, J., & Kress, G. (2010). Changing Text: A Social Semiotic Analysis of Textbooks. *Designs for Learning, 3*(1-2), 10-29.

Canducci, M. (2019). Il rapporto testo-figure nei libri di testo di matematica: il caso dei poligoni analizzato in ottica multimodale, In D'Amore B., & Sbaragli S. (Eds.). *Didattica della matematica e professionalità docente, Atti del Convegno nazionale "Incontri con la matematica" n. 33* (pp. 107-108). Bologna: Pitagora.

Ferrari, A. (2014). *Linguistica del testo. Principi, fenomeni, strutture.* Roma: Carocci.

Ferrari, P.L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica.* Bologna: Pitagora.

Parole chiave: coerenza testuale; libri di testo; poligoni; singolare; plurale.

Contaminazioni digitali dell'aula di matematica. Una proposta per valorizzare gli aspetti comunicativi e relazionali

Agnese Del Zozzo[1] e George Santi[2]
[1,2]Libera Università di Bolzano
[1,2]NRD Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Università di Bologna

1. Introduzione e strumenti teorici

Quando in un contesto di insegnamento/apprendimento (nel seguito: i/a) realizzato in un'aula fisica si innesta un'istanza di tecnologia digitale (nelle sue componenti hardware e software), nasce un nuovo spazio di i/a "virtuale", con nuove potenzialità di natura sociologica, comunicativa e affettivo-relazionale. I due contesti di i/a non sono né indipendenti né disgiunti ma si contaminano continuamente tra loro. In tali contesti ibridi emerge una complessità di tipo comunicativo e interazionale che contribuisce ad aumentare la ricchezza e la profondità delle dinamiche di i/a.
Per inquadrare/interpretare opportunamente le forme di i/a che emergono dalla contaminazione tra classi fisiche e virtuali, intrecciamo (Del Zozzo & Santi, 2020) lo schema triadico del Triangolo di Chevallard (Chevallard & Joshua, 1982; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2002) con la lettura in chiave sociologica, proposta da D'Amore (2005), della classe intesa come società. La natura generale dello schema triadico insegnante, allievo, Sapere introdotto da Chevallard consente di istanziare i vertici insegnante e allievo con individui diversi a seconda dello sviluppo dinamico del contesto didattico determinato dalla contaminazione di elementi fisici e virtuali. La lettura sociologica di D'Amore (2005) fornisce una lente per individuare e distinguere le pratiche funzionali e le meta-pratiche extrafunzionali nello spazio di i/a ibrido: le prime sono relative all'obiettivo costitutivo la società classe, vale a dire l'apprendimento della matematica, le seconde sono quelle che deviano da tale obiettivo.

2. Alcuni esempi

Seguono alcuni tra i più diffusi esempi di possibili contaminazioni che, a nostro avviso, possono essere sfruttati in modo didatticamente strategico:

- le *piattaforme di gestione di classi virtuali* (p.e. Google Classroom), offrono funzionalità per la comunicazione e la gestione di diversi gradi di interazione tra insegnante-studente, che assumono ruoli diversi nel triangolo, e degli studenti tra loro che in classe fisica non sempre sono realizzabili. Inoltre, il modo in cui insegnanti e studenti scelgono di usare tali funzionalità può essere fortemente indicativo del tipo di pratica (funzionale o extra-funzionale) in atto; viceversa, è possibile operare scelte intenzionali di tali funzionalità per innescare dinamiche comunicative virtuose per l'i/a;

- i *moduli e i questionari online*, se usati in modo strategico, possono permettere all'insegnante di ottenere informazioni circa lo stato del sapere appreso da *ciascuno* degli studenti della classe. Tale potenzialità può essere sfruttata non solo in termini di valutazione formativa e di analisi dell'errore ma anche per innescare opportune interazioni tra allievi, sia in classe fisica che in classe virtuale, sulla base delle risposte che ciascuno di loro ha dato;
- nelle *chat private degli studenti* possono avvenire degli scambi che riguardano questioni matematiche ed è interessante notare come anche in tali scambi si possano riproporre interazioni modellizzabili secondo lo schema triadico del Triangolo di Chevallard, nel quale però il ruolo di insegnante è assunto da un allievo che, sulla base del proprio sapere appreso, interagisce con i compagni con intenzioni didattiche. Un esempio di tale tipo di dinamica, attuata in sede di una chat privata tra studenti, è analizzato in Del Zozzo & Santi (2020) al quale rimandiamo per i dettagli.

3. Conclusione

La contaminazione tra classe fisica e classe virtuale apre nuovi scenari per i processi di i/a della matematica, che richiedono adeguate lenti teoriche e di essere sviluppati nelle pratiche d'aula per fornire agli allievi nuove forme di comunicazione e interazione sociale.

Bibliografia

Chevallard, Y., & Joshua, M.A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques*, *3*(1), 159-239.

D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica, 19*(3), 325-336.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2002). Un acercamiento analitico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática* (México DF, México), *14*(1), 48-61.

Del Zozzo, A., & Santi, G. (2020). Prospettive teoriche per lo studio della contaminazione tra ambienti di insegnamento/apprendimento fisici e virtuali. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 7, 9-35. DOI: 10.33683/ddm.20.7.1

Parole chiave: classi fisiche; classi virtuali; triangolo della didattica; pratiche e meta-pratiche; società classe.

Valutare senza voto numerico: strumenti e riflessioni di una sperimentazione realizzata nella scuola secondaria di primo grado

Francesco D'Intino
Istituto Comprensivo "Dante Alighieri", Rimini

In questo contributo si è voluto presentare un'esperienza didattica vissuta nell'arco di due anni scolastici, nella quale si sono sperimentati dispositivi valutativi incentrati in un'ottica principalmente formativa. Al termine di questi anni è stato possibile effettuare alcune riflessioni e trarre alcune conclusioni, in termini di percezione degli allievi e dell'insegnante. Il seminario è iniziato con l'enunciazione delle motivazioni a favore di una valutazione alternativa a quella con voto in decimi, ad esempio: studenti troppo concentrati sul voto in sé, mancanza di chiarezza nella valutazione, voto troppo giudicante per la persona. Si sono elencati inoltre alcuni luoghi comuni sulla valutazione, citati nel volume "Valutare a scuola" di Mario Castoldi, riguardanti l'oggettività della valutazione, il suo ruolo sanzionatorio, la chiarezza valutativa.
La sperimentazione presentata è finalizzata a rendere la valutazione uno strumento utile per gli studenti, il docente e i genitori. Si sono illustrate le scelte per la costruzione della griglia valutativa di matematica, per la quale sono stati definiti quattro criteri di valutazione:

- Obiettivi di apprendimento della materia: consistono nell'elenco degli obiettivi tratti dalle Indicazioni Nazionali 2012.
- Comunicazione (lessico e organizzazione del discorso): riguarda principalmente la valutazione dell'esposizione orale e, all'occasione, la valutazione delle risposte aperte nelle prove scritte.
- Partecipazione (svolgimento dei compiti affidati, compilazione dell'autovalutazione): si concentra sull'impegno dimostrato dagli studenti nei confronti dei compiti assegnati e di quanto viene richiesto dall'insegnante.
- Relazione (collaborazione con i compagni, comportamento in classe): indaga il comportamento dello studente nei confronti di insegnante e compagni, nonché il rispetto del regolamento di istituto.

Per ciascun criterio è stato scelto un peso nella valutazione periodica o finale: 70% per gli obiettivi di apprendimento, 10% per i restanti tre.
Nel corso dell'anno scolastico i criteri vengono valutati in livelli, utilizzando una scala da 1 a 4; in particolare nel caso dei primi due (Obiettivi di apprendimento e Comunicazione) viene attribuito un livello per ognuno degli obiettivi della disciplina e per lessico e organizzazione del discorso.

Per ogni prova svolta, scritta o orale, allo studente viene comunicato il livello raggiunto per ogni obiettivo o criterio valutato, integrato da consigli individualizzati riguardanti le difficoltà emerse. Al termine di ogni prova scritta viene richiesta una riflessione personale circa le difficoltà incontrate che si concretizza nella compilazione di un documento di autovalutazione, che viene poi condiviso con il docente.
Si è illustrata inoltre la tabella di conversione impiegata per trasformare i livelli assegnati in un voto numerico in decimi, che per legge deve essere comunicato al termine di ogni periodo scolastico.
Il seminario prosegue con l'analisi delle risposte fornite dagli studenti al questionario somministrato loro per comprendere l'efficacia delle scelte valutative. Da questa si evince che il metodo valutativo implementato ha aiutato gli alunni a seguire con più attenzione la correzione delle prove scritte. La griglia valutativa con gli indicatori, i consigli personalizzati per obiettivo e il rimando continuo agli aspetti importanti della materia hanno permesso agli studenti di avere una maggiore confidenza e conoscenza dei contenuti matematici in gioco. Anche per quanto riguarda la consapevolezza riguardo ai propri processi di apprendimento, i dispositivi pensati per l'autovalutazione hanno promosso un approccio metacognitivo.
Questo metodo valutativo ha provocato visibili cambiamenti anche nella didattica, sia per quanto riguarda la progettazione delle lezioni che il controllo dell'apprendimento degli studenti. È emersa in corso d'opera una riflessione più profonda e consapevole rispetto a quali obiettivi verificare in ogni prova e anche su come equilibrarli nei vari esercizi scelti: in sostanza, è aumentata la consapevolezza del docente di ciò che richiede agli studenti.
Un'ultima considerazione riguarda il tema della valutazione dei traguardi per competenze: in matematica questo approccio rischia di risultare poco efficace perché basato su categorie molto ampie, perciò si è preferito basare il metodo valutativo sperimentato sugli obiettivi di apprendimento, che descrivono in maniera più precisa e puntuale quel che gli alunni apprendono. L'insegnamento delle scienze, invece, si presta maggiormente all'utilizzo dei traguardi per lo sviluppo delle competenze: si è fatto quindi un accenno a una griglia valutativa predisposta per tale materia che, però, non è ancora stata sperimentata.

Parole chiave: valutazione in decimi; valutazione formativa; griglia di valutazione; autovalutazione; scuola secondaria di primo grado.

Storia della matematica in aula e ostacoli epistemologici

Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Università di Bologna

Nella teoria delle situazioni ideata da Guy Brousseau negli anni '70, ha un ruolo fondamentale l'idea di "ostacolo", come di qualsiasi cosa che si frapponga all'apprendimento. Si può pensare che un ostacolo è costituito da un'idea matematica che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla a un problema/tema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti. Nella necessità didattica di superare tali ostacoli, si studiano situazioni didattiche strutturate appositamente per fornire agli allievi prove della necessità di modificare le loro concezioni. Un ostacolo epistemologico finisce talvolta con il provocare ostacoli didattici, perché il docente cerca strumenti agili e utili per evitare quegli errori detti sopra che, invece, sono naturali. In teoria delle situazioni si distinguono tre tipi di ostacoli, ma qui ci occuperemo solo della III tipologia: gli ostacoli epistemologici.

Ogni argomento a carattere matematico ha un proprio statuto epistemologico che dipende dalla storia della sua evoluzione all'interno della matematica, dalla sua accettazione critica nell'ambito accademico, dalle riserve che gli sono proprie, dal linguaggio in cui è espresso o che richiede per potersi esprimere. Per esempio, quando nella storia dell'evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno *ostacoli di carattere epistemologico* sia nell'essere concepito, sia nell'essere accettato dalla comunità dei matematici, sia nell'essere appreso. Quest'ultimo punto si manifesta, per esempio, sotto forma di errori ricorrenti e tipici di vari studenti, in diverse classi, stabili negli anni. Abbiamo al giorno d'oggi moltissimi esempi di ostacoli epistemologici, una bibliografia sterminata. Trovo affascinante il fatto che gli ostacoli epistemologici, data la loro natura, si possano rivelare in due modalità, entrambe di estremo interesse: nello studio della storia della matematica; nella ripetizione costante di certi errori in aula.

Come dire, un parallelo fra la storia della matematica e la prassi scolastica. Proprio il fascino per questo aspetto mi ha spinto a esemplificare, cosa che farò brevemente di seguito. Metterò in evidenza sotto forma di esempi solo

alcuni aspetti didattici e non quelli storici, che sarebbero in verità di estremo interesse.
1. Scuola secondaria di I e II grado. Il successivo di 3,25 è… Siamo in ℚ, denso, dunque il successivo di 3,25 non esiste, ogni risposta è errata. Per esempio, se la proposta è 3,26, basta mostrare che fra 3,25 e 3,26 ci sono altri (infiniti) numeri razionali. Ma in ℕ il successivo di un numero esiste sempre, unico.
2. Scuola secondaria di II grado. ℤ ha il doppio di elementi di ℕ. Ciò dipende dal fatto che le rappresentazioni di ℕ e ℤ sulla retta numerica sono sempre fatte secondo i rispettivi cosiddetti "ordini naturali", irrinunciabili e unici. Allo stesso tempo ℕ e ℤ sono infiniti (non si dimostra, si confondono infinità e illimitatezza). Se si riesce a far capire che ℕ e ℤ hanno la stessa cardinalità, ciò viene giustificato grazie all'appiattimento: tutti gli insiemi infiniti si possono mettere in corrispondenza biunivoca tra loro, dunque esiste un solo infinito.
3. Scuola secondaria di I e II grado, università. Alla fine del percorso scolastico abbiamo dovuto constatare che il numero zero è un oggetto stravagante, con peculiarità tali da farlo assurgere a ente quasi estraneo alla matematica. 0 ha un suo ruolo epistemologico assai particolare nella didattica (e nella storia). Abbiamo anche sentito dire che: 0 non è un numero, non è nulla, è il vuoto.
4. Scuola secondaria di I e II grado. Per millenni le equazioni furono considerate strumenti per determinare misure o quantità. Passare allo studio di questo tema come oggetto è sempre difficile, come lo è stato nella storia giustificare uno studio dell'equazione in sé. Spesso gli studi che si propongono in aula, per esempio analizzare le equazioni in sé, come oggetto, trovano difficoltà.
5. Scuola secondaria di II grado e università. Il tema delle funzioni è uno dei più ostici sia nella storia della matematica che nella prassi didattica. Esistono fior di ricerche in didattica della matematica su questo tema. Talvolta le definizioni che vengono date non aiutano a capire il senso di questo oggetto complicato.
Per affrontare con consapevolezza ciò, è bene conoscere elementi opportuni di storia della matematica (D'Amore & Sbaragli, 2017, 2018, 2019, 2020).

Bibliografia

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia.* Vol. I. *Dalle origini al miracolo greco*. Bari: Dedalo.
D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2018). *La matematica e la sua storia*. Vol. II. *Dal tramonto greco al Medioevo*. Bari: Dedalo.
D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2019). *La matematica e la sua storia*. Vol. III. *Dal Rinascimento al XVIII secolo*. Bari: Dedalo.
D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia.* Vol. IV. *Dal XVIII al XXI secolo*. Bari: Dedalo.

Parole chiave: ostacoli epistemologici; teoria delle situazioni; storia della matematica; aula; oggetti matematici.

(Non) parliamo di pensiero computazionale

Michael Lodi, Simone Martini, Marco Sbaraglia e Stefano Pio Zingaro
Dipartimento di Informatica - Scienza e Ingegneria, Università di Bologna

1. Introduzione

Espressioni come *pensiero computazionale* ("computational thinking", CT) e *coding* si diffondono sempre più nel mondo della scuola, usate da formatori, libri di testo, documenti ministeriali e leggi nazionali. Questi termini rischiano di generare misconcezioni negli insegnanti (Corradini Lodi, & Nardelli, 2017, 2018) che non hanno ricevuto una formazione rigorosa sui concetti fondamentali dell'informatica, disciplina in cui tali espressioni si collocano.
L'espressione CT ha però origine nella didattica della matematica, probabilmente usata per la prima volta da Seymour Papert nel 1980. Papert sostiene l'uso della programmazione come strumento trasversale, utile agli studenti per rendere concreti concetti astratti e costruire modelli mentali di ciò che stanno imparando. Papert, a partire dal costruttivismo di Piaget, teorizza il *costruzionismo*: il computer, con il suo potere di simulare mondi, mette a disposizione materiali da costruzione diversi e *significativi* (non solo cognitivamente, ma anche emotivamente) per ogni studente. Il CT "alla Papert" evidenzia l'alto valore trasversale dell'informatica, che consente di *eseguire* le astrazioni costruite, ossia di simulare i fenomeni e i concetti da apprendere. Inoltre, il CT è sempre riferito a uno specifico esecutore (in questo si distingue dal *pensiero algoritmico*): "far risolvere" un problema a un automa esterno, limitato a un ristretto set di istruzioni, che non fa "inferenze umane", è un ottimo esercizio per comprendere a fondo il problema stesso.
D'altra parte, nella società di oggi, permeata di dispositivi e applicazioni digitali e influenzata da algoritmi che governano molteplici suoi aspetti, è indispensabile imparare le basi scientifico-culturali dell'informatica (Lodi, Martini, & Nardelli, 2017). Questo è l'obbiettivo del movimento per il CT a scuola, nato nel 2006 dall'input di Jeannette Wing, che definisce il CT come *problem solving computazionale*: formulare soluzioni in modo che siano eseguibili da un elaboratore di informazioni. Sosteniamo che il CT "alla Wing" sia proprio il "sedimento concettuale dell'informatica" (Lodi, Martini, & Nardelli, 2017).

2. Coding, pensiero computazionale o informatica?

Spesso ci si riferisce alle attività di introduzione giocosa alla programmazione col termine *coding*, che indica solo la fase più meccanica della scrittura del codice (mentre programmare consiste anche in analisi, design, test e debug).

Se si propongono attività di "coding" per sviluppare il pensiero computazionale (cioè per risolvere problemi facendo uso delle idee fondamentali dell'informatica), le attività devono includere l'espressione delle soluzioni in un linguaggio che sia comprensibile ed eseguibile da un automa. Discuteremo due esempi significativi: "pixel art" e "robot sulla scacchiera".
D'altra parte, si può fare *problem solving* senza scomodare l'informatica, così come si può imparare a orientarsi nello spazio senza robot sulla scacchiera. Allo stesso modo, non ha senso ricondurre tutte le attività che fanno uso del ragionamento logico all'informatica: la logica è un elemento fondamentale del "pensare da informatico" solo se usata affinché un automa elabori informazione.
Piattaforme come CS Unplugged, Code.org e Scratch offrono un ottimo punto di ingresso per insegnare concetti di informatica fin dalla scuola primaria.
Come detto, il *problem solving computazionale* è efficace anche per la didattica di altre discipline. Suggeriremo alcuni esempi nell'ambito della matematica e della fisica: la "geometria della tartaruga", la simulazione di un salto in diverse condizioni di gravità, l'estrazione di grandi quantità di numeri pseudocasuali per sperimentare concetti di probabilità spesso non intuitivi.

3. Conclusioni

Quando parliamo di pensiero computazionale dobbiamo sempre considerare due livelli. Da una parte, il CT non è altro che il sedimento culturale dell'informatica: insegniamo principi di informatica e quello che rimane è pensiero computazionale ("alla Wing"). D'altra parte, non dobbiamo dimenticare il livello "alla Papert": quei principi di informatica non possono essere nozioni "esterne", ma devono trasformarsi in materiali da costruzione significativi nelle mani degli studenti, affinché realizzino concretamente (e quindi comprendano) i concetti anche di altre discipline.

Bibliografia

Corradini, I., Lodi, M., & Nardelli, E. (2017). Conceptions and Misconceptions about Computational Thinking among Italian Primary School Teachers. *Proceedings of the 2017 ACM Conference on International Computing Education Research* (pp. 136-144). New York: ACM.

Corradini, I., Lodi, M., & Nardelli, E. (2018). An Investigation of Italian Primary School Teachers' View on Coding and Programming. *Informatics in Schools. Fundamentals of Computer Science and Software Engineering* (pp. 228-243). Cham: Springer International Publishing.

Lodi, M., Martini, S., & Nardelli, E. (2017). Abbiamo davvero bisogno del pensiero computazionale? *Mondo Digitale, 72*(5), art. 2.

Parole chiave: pensiero computazionale; coding; Papert; Wing; informatica.

Le dimostrazioni senza parole: quale ruolo possono svolgere in un approccio mirato a favorire lo sviluppo di consapevolezze circa il senso dell'attività dimostrativa?

Lorenzo Mazza[1], Davide Passaro[2], Antonio Veredice[3] e Annalisa Cusi[4]
[1,3,4]*Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma*
[2]*Dipartimento di Scienze Statistiche, Sapienza Università di Roma*

1. Introduzione

La ricerca in didattica della matematica ha evidenziato il ruolo fondamentale che i processi di visualizzazione svolgono nel favorire la comprensione delle dimostrazioni, mettendo in luce che coinvolgere gli studenti in attività di interpretazione e analisi di dimostrazioni senza parole può favorire uno spostamento del focus dalle dimostrazioni "che provano/verificano" alle dimostrazioni "che spiegano/chiariscono" (Hanna, 1998; Gierdien, 2007).
In particolare, è stata evidenziata l'efficacia di artefatti grafici nel rivelare al lettore le motivazioni alla base di un'idea matematica e nel favorire, eventualmente, anche l'esplorazione del percorso attraverso il quale ricostruire i passi deduttivi della dimostrazione stessa.
In questo quadro è stato condotto uno studio pilota in classi del secondo anno del liceo scientifico, mirato a indagare il ruolo che le dimostrazioni senza parole possono svolgere nell'ambito di percorsi di insegnamento-apprendimento progettati con l'obiettivo di favorire lo sviluppo, da parte degli allievi, di profonde consapevolezze circa il senso dell'attività dimostrativa e i significati sottesi al concetto stesso di dimostrazione.

2. Lo studio pilota

Lo studio è stato condotto in tre classi del Liceo Scientifico Peano di Monterotondo (RM) che partecipano al progetto didattico *Liceo Matematico.*
Sono state progettate e implementate due schede di lavoro focalizzate su alcuni esempi di dimostrazioni senza parole di tipo algebrico e geometrico (tratte da Nelsen, 1993, 2001). Le domande presenti nelle schede di lavoro mirano a far ricostruire il processo dimostrativo sotteso e a far riflettere gli studenti su un confronto fra tali dimostrazioni e altre tipologie di dimostrazioni, che solitamente vengono privilegiate. Agli studenti è stato anche somministrato un questionario per evidenziare eventuali criticità e punti di forza di un approccio focalizzato sulle dimostrazioni senza parole e per mettere in luce l'efficacia di un'impostazione di questo tipo nel favorire lo sviluppo di competenze di riflessione, confronto e analisi critica.

L’attività è stata svolta attraverso la modalità della didattica a distanza a causa delle misure di contenimento del COVID-19 (per un totale di 2 incontri di 1 ora ciscuno). La prima scheda è focalizzata su una classica dimostrazione senza parole del teorema di Pitagora, basata sul confronto tra figure in cui gioca un ruolo fondamentale l’equiscomponibilità. La seconda scheda ha come oggetto la dimostrazione visiva che consente di determinare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{1}{3}$. Le domande proposte mirano a condurre gli studenti a: (a) ricostruire la dimostrazione a partire dall’immagine; (b) confrontare, in modo critico, la dimostrazione senza parole proposta e un’altra dimostrazione, associabile a un approccio tradizionale; (c) riflettere sull’efficacia e sulla validità di questo tipo di approccio alla dimostrazione.

2. Prima analisi parziale e ulteriori sviluppi

Da una prima analisi dei risultati ottenuti durante lo studio pilota possiamo affermare che, per molti studenti, la dimostrazione senza parole, nel caso si riferisca ad argomenti già noti, risulta convincente e infonde negli studenti una sensazione di comprensione più profonda delle conoscenze in gioco. Gli stessi studenti affermano di trovarsi a disagio nel caso in cui le dimostrazioni senza parole riguardino argomenti *nuovi*. Molti studenti lamentano, in particolare, l’assenza, in questo caso, di una serie di passaggi da seguire, che, a loro avviso, dovrebbero essere chiari e indiscutibili, “scritti *nero su bianco”*. Pensiamo che questi risultati siano principalmente legati al fatto che gli studenti coinvolti non abbiano avuto precedenti esperienze caratterizzate da un approccio visuale, che richiede di aver sviluppato le capacità di osservare, analizzare, generalizzare, anticipare e congetturare.
Per questo motivo, lo sviluppo successivo di questa ricerca riguarderà una riprogettazione dell’attività, da prevedere su tempi più lunghi, che tenga conto del feedback ricevuto dagli studenti in questa prima fase. Approfondiremo, inoltre, il ruolo dell’insegnante come mediatore e guida nell’intero processo.

Bibliografia

Gierdien, M.F. (2007). From “proofs without words” to “proof that explain” in secondary mathematics. *Pythagoras,* 65, 53-62.

Hanna, G. (1998). Proofs that prove and proofs that explain. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 45-51). Paris: PME.

Nelsen, R.B. (1993). *Proofs Without Words* (Vol. 1). Washington (DC): The Mathematical Association of America.

Nelsen, R.B. (2001). *Proofs Without Words* (Vol. 2). Washington (DC): The Mathematical Association of America.

Parole chiave: dimostrazioni senza parole; consapevolezze degli studenti; processi di visualizzazione; dimostrazioni che spiegano/chiariscono; concetto di dimostrazione.

Un percorso didattico interdisciplinare sui modelli matematici tramite dei fit dei dati del coronavirus Covid-19

Filippo Pallotta[1], Davide Passaro[2] e Claudio Sutrini[3]
[1]Dipartimento di Scienze e Alta Tecnologia, Università dell'Insubria, Como
[2]Dipartimento di Scienze Statistiche, Università La Sapienza di Roma
[3]Dipartimento di Fisica, Università di Pavia

1. Introduzione

La realizzazione nella scuola superiore di percorsi interdisciplinari legati alla capacità di individuare e costruire modelli matematici può contribuire allo sviluppo delle competenze chiave necessarie per favorire la partecipazione attiva e responsabile degli studenti all'interno della comunità.
Con il diffondersi dell'epidemia di coronavirus Covid19, l'attenzione di gran parte della popolazione italiana si è concentrata sulla possibilità di sviluppare dei modelli matematici che fossero in grado di descrivere adeguatamente il diffondersi dell'epidemia e quindi di prevedere gli effetti della sua evoluzione, come ad esempio il rapporto tra il numero degli infetti e quello dei posti disponibili in terapia intensiva.
I dati dell'epidemia, messi quotidianamente a disposizione dalla Protezione Civile, oltre a essere utili per gli scienziati, offrono agli insegnanti l'opportunità di presentare ai propri studenti un percorso didattico che consenta loro di acquisire strumenti per valutare criticamente informazioni scientifiche e comprendere la complessità del mondo attuale.

2. Descrizione del percorso

Ne è nato un percorso interdisciplinare che è stato concretamente proposto a studenti degli ultimi due anni di studi presso il Liceo "B. Russell" di Roma, il Liceo Scientifico "T. Taramelli" e il Liceo Classico "U. Foscolo" di Pavia nel mese di maggio dell'a.s. 2019-2020. Tale percorso ha accompagnato gli studenti dall'introduzione dei primi elementi del linguaggio Python (Passaro, 2016), attraverso l'utilizzo di Google Colaboratory Notebook o dell'analogo Notebook Azure, fino al suo utilizzo per accompagnare la creazione di modelli matematici per l'epidemiologia, atti a verificare l'andamento dei dati reali e a fare possibili previsioni.

2.1 Sequenza didattica e metodologie

Le lezioni, realizzate durante il periodo di Didattica a Distanza (DaD), si sono sviluppate attorno a un nucleo di quattro temi fondamentali:

- Python: introduzione ed elementi caratterizzanti (Palmigiani & Passaro, 2018) (in funzione dello sviluppo successivo);
- Matplotlib per file CSV: utilizzo della library per rappresentare dati reali (VanderPlas, 2016);
- Fit e modelli: il problema teorico del fit di dati e il suo utilizzo per la conferma di modelli teorici;
- Modelli epidemiologici: modellizzazione matematica di dati reali sul coronavirus Covid 19.

Lo sviluppo di questi temi è stato realizzato per mezzo di notebook interattivi condivisi, che permettessero agli studenti da un lato di poter costantemente essere a contatto con il linguaggio utilizzato e appropriarsene in modo sempre più adeguato, dall'altro di essere in prima persona chiamati a eseguire semplici esercizi durante le lezioni. Questa metodologia ha reso la partecipazione alle lezioni a distanza costante e attiva, in modo che le capacità dei singoli ma anche gli errori, le incomprensioni e i dubbi fossero immediatamente utilizzabili per commenti e confronti in grado di migliorare la comprensione dei concetti da parte di tutti. Ne sono una prova gli esercizi raccolti dai docenti durante lo svolgimento delle lezioni.

3. Conclusioni

Lo sviluppo delle lezioni ha permesso agli studenti di acquisire le competenze necessarie a importare dati in formato CSV, rappresentarli con grafici appropriati e costruire semplici modelli di previsione (lineare, polinomiale, esponenziale, logistico) sui dati acquisiti inerenti al Covid 19, ma più in generale applicabili e applicati anche in altri contesti. Tali competenze, di carattere evidentemente trasversale, potranno essere utilizzate in futuro dai singoli in ogni contesto, indipendentemente dagli studi specifici che affronteranno.

Bibliografia

Palmigiani, D., & Passaro, D. (2018). Insegnare Matematica e Fisica utilizzando il notebook Jupyter: Python e LaTex per una didattica innovativa, *Archimede, LXX*(2), 108-113.

Passaro, D. (2016). Matematica e programmazione: usare Python al Liceo. *Matematica e programmazione: usare Python al Liceo*, *Archimede, LXVII*(1), 42-48.

VanderPlas, J. (2016). *Python data science handbook: Essential tools for working with data*. Sebastopol, USA: O'Reilly Media.

Parole chiave: Python; interdisciplinarità; competenze trasversali; modelli; attualità.

Congetturare e dimostrare con l'uso di un software di geometria

Luigi Tomasi
Università di Ferrara

In questo seminario si riprende il tema «Argomentare, Congetturare, Dimostrare» (ACD) dalla proposta di curricolo di matematica elaborata da una Commissione UMI e contenuta nel volume *Matematica* 2003. In questa proposta, ACD era un nucleo trasversale, che quindi coinvolgeva tutti gli ambiti di contenuto del curricolo di matematica (Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni). Si tratta di un tema molto importante e fondamentale della matematica. In particolare l'educazione all'argomentazione è un obiettivo didattico per il quale la matematica è chiamata a dare un suo contributo specifico.

Il piano m@t.abel (http://www.scuolavalore.indire.it/superguida/matabel/) ha ripreso il curricolo proposto in UMI, *Matematica* 2003 (UMI, 2003) per riproporlo come un piano di formazione degli insegnanti, basato su delle attività di matematica da svolgere in classe, in forma laboratoriale, con l'uso integrato delle tecnologie e in particolare dei software di matematica. Su questi stessi temi, nel seminario, ci si riferirà anche ai problemi di "Flatlandia" (http://dm.unife.it/fardiconto/flatlandia/), una rubrica di problemi in rete che presenta molti spunti per quanto riguarda l'uso del software, finalizzato a congetturare delle proprietà, tramite problemi essenzialmente basati su costruzioni geometriche e sulla dimostrazione.

Da quasi trent'anni c'è stato un certo ritorno della geometria, grazie al diffondersi dei software di geometria dinamica. Questi strumenti hanno determinato un recupero dell'interesse per l'insegnamento della geometria perché consentono di vedere dinamicamente le figure ed hanno riportato in primo piano i metodi sintetici nello studio della geometria e dei problemi. Dal punto di vista didattico il software deve essere integrato in un percorso didattico ed utilizzato in classe al momento opportuno, con diverse modalità: (1) quando c'è bisogno di fare una figura con una elevata precisione; (2) per esplorare dinamicamente e per visualizzare oggetti geometrici che, se modificati opportunamente, mettono in luce delle proprietà invarianti (si sfrutta il "dragging", ossia il trascinamento degli elementi di "base" della figura); (3) per scoprire delle proprietà e produrre delle congetture; anche per questo obiettivo il software viene utilizzato dagli studenti, con la guida dell'insegnante.

Per potere utilizzare il software dal punto di vista didattico l'insegnante deve conoscerlo in modo approfondito e deve preparare un preciso progetto didattico in cui si prevede di usare il software al momento opportuno.

Cosa accade quando si integra nella pratica didattica il software di geometria? Il contesto nel quale la classe agisce cambia, perché accanto a strumenti tradizionali, quali la riga e il compasso, gli allievi hanno a disposizione nuovi strumenti, anzi un sistema di nuovi strumenti contenuto nel software (Mariotti, 2005). Con un software di geometria un problema di costruzione può considerarsi risolto se e solo se la figura che si ottiene nel computer «supera» il test del trascinamento.
Nella proposta di curricolo UMI, in *Matematica* 2003, troviamo quindi un'impostazione innovativa per quanto riguarda l'insegnamento della matematica e l'uso dei software nell'insegnamento della matematica. Alcune idee salienti di questa proposta di curricolo sono le seguenti: (1) si consiglia l'uso di software (di geometria dinamica, CAS-computer algebra system, fogli elettronici, calcolatrici grafiche, ecc.); (2) si sottolinea che la dimostrazione, dal punto di vista didattico, non va presentata solo in geometria; (3) si insiste molto sull'argomentazione e sulle congetture, sulla discussione matematica, prima di arrivare alla dimostrazione (nella scuola sec. di II grado); (4) si pone l'accento su attività di esplorazione e di scoperta di proprietà, da realizzare mediante l'uso dei software e in generale delle tecnologie.
Come sappiamo c'è una certa difficoltà degli studenti di scuola secondaria a produrre dimostrazioni. Di solito gli allievi leggono e ripetono delle dimostrazioni – quelle richieste dagli insegnanti – ma produrre una dimostrazione è una cosa diversa. Questo richiede un percorso didattico specifico dell'insegnante. Di solito gli studenti non sentono il bisogno di produrre una dimostrazione. Talvolta pensano, soprattutto all'inizio della scuola secondaria di II grado, che si vogliano dimostrare delle proprietà «evidenti», che «si vedono». Nell'insegnamento di questi temi occorre quindi fare delle scelte metodologiche diverse da quelle solite presenti nei libri di testo. Non si può usare in modo sistematico, già all'inizio della scuola secondaria di II grado, il metodo assiomatico-deduttivo. Prima occorre lavorare sulle congetture e sull'argomentazione. Su questi aspetti l'uso di un software in classe può essere di molto aiuto. Per quanto riguarda la dimostrazione occorre scegliere alcuni nuclei fondamentali e un numero ridotto di teoremi da dimostrare, mettendo in chiaro qual è il quadro teorico in cui si inseriscono.

Bibliografia

Mariotti, M.A. (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*. Bologna: Pitagora.

UMI (2003). *MATEMATICA 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica: Ciclo secondario*. MIUR. Disponibile da: https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2003.pdf

Parole chiave: software di geometria dinamica; laboratorio di matematica; argomentazioni; congetture; dimostrazioni.

Gli sponsor

GIUNTI Scuola

DeA SCUOLA

Pearson

Rizzoli EDUCATION

MONDADORI EDUCATION

edizioni Dedalo

Erickson

pitagora editrice

Sapyent

A un passo dall'infinito...

www.aunpassodallinfinito.com